ECUACIONES DIFERENCIALES A COEFICIENTES CONSTANTES INHOMOGÉNEAS

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea:

1-Resolver la ecuación diferencial lineal homogénea asociada: y_h

2-Obtener alguna solución particular de la ecuación no homogénea: y_p

Sabemos que: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ representa la solución general de la ecuación planteada cualquiera sea el orden.

Cuando en la EDL no homogénea:

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=g(x)$$

y la función g(x) contiene sólo tres tipos de funciones:

polinomios,
exponenciales
trigonométricas (senos o cosenos),
combinaciones de ellas tres, el método de solución

El método de COEFICIENTES INDETERMINADOS consiste en proponer la forma de la solución particular y_p (con coeficientes indeterminados) a partir de la forma del término g(x) a través del método de superposición.

MÉTODO SUPERPOSICIÓN

- Este método nos permite encontrar una solución particular *Yp(x) para* las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x),$$

donde a, b, *c son constantes y*

$$g(x) = \begin{cases} b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 & \text{función polinomial} \\ e^{ax} & \text{función exponencial} \\ \operatorname{sen} bx & \text{función seno} \\ \cos bx & \text{función coseno} \end{cases}$$

Ejemplos

$g(x)=10$,

$g(x)=x^2-5x$,

$g(x)=15x-6+8e^{-x}$

$g(x)=\text{sen}3x-5x\cos 2x$,

$g(x)= x\, e^x \text{ sen } x+(3x^2-1)e^{-4x}$

g(x) es una combinación lineal de funciones de las clases mencionadas

El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones donde g(x) sea:

$g(x)= \ln x$, $g(x)=1/x$, $g(x)= \tan x$, $g(x)=\text{sen}\text{-}1$, etc.

Ahora describiremos paso a paso la solución de la siguiente ecuación, para tener una visión mas clara respecto al tema

$$y'' + 4y' - 2y = 2X^2 - 3X + 6$$

1- Se resuelve la ecuación homogénea asociada y”+4y’-2y=0.

se encuentra que las raíces de la ecuación característica son:

$$r_1=-2-\sqrt{6} \text{ y } r_2=-2+\sqrt{6}$$

Por consiguiente, la solución y_h puede scribirse como:

$$y_h = C_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$$

2-Como g(x) es un polinomio cuadrático, se propone como solución particular un polinomio cuadrático, $Yp=Ax^2+Bx+C$ donde A,B y C son los coeficientes indeterminados que debemos encontrar.

3-Sustituyendo Yp y las derivadas en la ecuación homogénea asociada se obtiene,

$$y'' + 4y' - 2y = 2X^2 - 3X + 6 = 2A + 8AX + 4B - 2AX^2 - 2BX - 2C$$

Como se supone que la última ecuación es una identidad los coeficiente de los exponentes similares a x deben ser iguales:

$$y'' + 4y' - 2y = 2X^2 - 3X + 6 = 2A + 8AX + 4B - 2AX^2 - 2BX - 2C$$

Es decir, $-2A=2$, $8A-2B=-3$, $2A+4B-2C=6$, luego

$$A=-1,\quad B=-5/2,\quad C=-9$$

La solución general de la ecuación $y'' + 4y' - 2y = 2X^2 - 3X + 6$ es:

$$\mathbf{y(x)=y_h(x)+y_p(x)=}\ C_1e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2e^{(-2+\sqrt{6})x} - X^2 - 5/2\,X - 9$$

Resolver el siguiente problema a valores iniciales:

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{-t}\cos t$$

$$x(0) = x'(0) = 0$$

Solución

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica será:

$$r_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow x_h = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t} sent$$

Ahora nos toca hallar la solución particular del problema no homogéneo. ¿Qué solución proponemos? La solución de la ecuación homogénea es parte de la particular!!!!! Si no lo tenemos en cuenta la identidad será falsa.

Proponemos como particular:

$$x(t) = Ate^{-t}\cos t + Bte^{-t} sent$$

Multiplicamos por t las veces necesarias como para mantener la identidad

$$x(t) = Ate^{-t}\cos t + Bte^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$$

$$x'(t) = Ae^{-t}\cos t - Ate^{-t}\cos t - Ate^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + Be^{-t}\,\mathrm{sen}\,t - Bte^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + Bte^{-t}\cos t$$

$$x''(t) = -Ae^{-t}\cos t - Ae^{-t}\,\mathrm{sen}\,t - Ae^{-t}\cos t + Ate^{-t}\cos t + Ate^{-t}\,\mathrm{sen}\,t - Ae^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + Ate^{-t}\,\mathrm{sen}\,t +$$

$$- Ate^{-t}\cos t - Be^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + Be^{-t}\cos t - Be^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + Bte^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + Bte^{-t}\cos t + Be^{-t}\cos t +$$

$$- Bte^{-t}\cos t - Bte^{-t}\,\mathrm{sen}\,t =$$

$$= -2Ae^{-t}\cos t - 2Ae^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + 2Ate^{-t}\,\mathrm{sen}\,t - 2Be^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + 2Be^{-t}\cos t - 2Bte^{-t}\cos t$$

$$x''+2x'+2x=-2Ae^{-t}\cos t-2Ae^{-t}sent+2Ate^{-t}sent-2Be^{-t}sent+2Be^{-t}\cos t-2Bte^{-t}\cos t+$$

$$+2Ae^{-t}\cos t-2Ate^{-t}\cos t-2Ate^{-t}sent+2Be^{-t}sent-2Bte^{-t}sent+2Bte^{-t}\cos t+2Ate^{-t}\cos t+$$

$$+2Bte^{-t}sent=-2Ae^{-t}sent-2Be^{-t}\cos t \underset{\text{función g(x)}}{\overset{\text{igualando con la}}{\underset{\downarrow}{=}}} e^{-t}\cos t \Rightarrow A=0,\ B=-\tfrac{1}{2}$$

La solución general:

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t)=C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}sent-\tfrac{1}{2}e^{-t}tsent$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$x(t)=-\tfrac{1}{2}e^{-t}t\,\mathrm{sen}\,t$$

Resolver:

$$y'' - 4y' + 2y = 5e^{x}$$

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 10Cosx - 6e^{x}$$

$$y''' + y'' = e^{x}Cosx$$

Tabla de Soluciones Particulares

g(x)	Forma de y_p
1. 8 (Cualquier constante)	A
2. 3x-1	Ax+B
3. $5x^2+1$	Ax^2+Bx+C
4. x^3+x	Ax^3+Bx^2+Cx+D
5. e^{6x}	Ae^{6x}
6. Sen(3x)	ASen(3x)+BCos(3x)
7. Cos(2x)	ASen(2x)+BCos(2x)
8. $(9x^2-x)e^{4x}$	$(Ax^2+Bx+C)e^{4x}$
9. e^{5x}Sen(2x)	Ae^{5x}Sen(2x)+Be^{5x}Cos(2x)
10. $3x^2$Sen(5x)	(Ax^2+Bx+C)Sen(5x)+ (Dx^2+Ex+F)Cos(5x)
11. xe^{5x}Sen(2x)	$(Ax+B)e^{5x}$Sen(2x)+ $(Cx+D)e^{5x}$Cos(2x)