Casos especiales de orden 2

En general podemos escribir una ecuación diferencial de orden 2 homogénea como:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

En esta instancia analizaremos como resolver ecuaciones diferenciales de orden 2 que presentan:

1. Ausencia de variable dependiente,
$$F(x, y', y'') = 0$$
2. Ausencia de variable independiente,
$$F(y, y', y'') = 0$$

En **1** y no aparece de manera explícita entonces se introduce una variable auxiliar $v(x)$ que tiene el rol de variable dependiente de modo que:

$$y'(x) = v(x)$$

y por lo tanto
$$y''(x) = v'(x)$$

y
$$F(x, y', y'') = F(x, v, v') = 0$$

que es una ecuacin diferencial de primer orden que ya sabemos resolver.

Ejemplo:

$$xy'' - y' = 3x^2$$

Normalizando la ecuación se tiene:

$$y'' - y'/x = 3x$$

Luego haciendo el cambio de variables:

$$y' = v \qquad y'' = v'$$

se tiene:
$$v' - v/x = 3x$$

que es una ecuación lineal en v de orden 1 inhomogénea.

La solución de la ecuación diferencial homogénea asociada es:

$$v_H(x) = e^{-(\int -dx/x)} = x$$

Para hallar la solución particular calculamos el factor integrante, $u(x) = e^-(\int dx/x) = x^-1$ y se obtiene que
$$v_G(x) = c_1x + x \int 3xx^{-1}dx = c_1x + 3x^2$$

Luego, dado que $y' = v$ se tiene que

$$y(x) = x^3 + 1/2c_1x^2 + c_2$$

En **2** x no aparece con lo cual estamos en la situación:$F(y, y', y'') = 0$. En este caso, introduciendo una variable auxiliar dependiente de y y considerando a y como la variable independiente, la ecuación reduce su orden.

Definimos:

$$v(x) = y'$$

que tiene el rol de variable dependiente de modo que:

$$dv/dx = dv/dy.dy/dx = y''(x)$$

y por lo tanto

$$y'' = v.v'$$

y

$$F(y, y', y'') = F(y, v, v.v') = 0$$

que es una ecuación diferencial de primer orden que ya sabemos resolver.

Ejemplo:

$$y'' + 4y = 0$$

Sea $v(x) = y'$, luego $y'' = v.v'$ y aplicando este cambio de variables, la ecuación es:

$$v.v' - 4y = 0$$

Esta ecuación es separable y su solución es:

$$v(x) = 2(y^2 + c_1)^{1/2}$$

Luego, dado que $y' = v$ se tiene que:

$$y' = 2(y^2 + c_1)^{1/2}$$

una ecuación separable cuya solución es:

$$y = c_1^{1/2} sen(2x + c_2)$$