ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS
CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0 \qquad (1)$$

donde $a, b, c \in R; a \neq 0$.

Si $y(t)$ es solución de la ecuación debe ser de naturaleza tal, que al combinarla apropiadamente con sus derivadas anulen la ecuación anterior. Hay pocas funciones con esta propiedad, ellas se basan en expresiones del tipo: $e^t,\ \cos t,\ sen\ t$.

Probemos si $y(t) = e^{rt}$ es solución de la ecuación,

$$a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = 0$$

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

Luego para que $y(t) = e^{rt}$ sea solución debe cumplirse que $ar^2 + br + c = 0$.

Este polinomio se denomina ***polinomio característico de la ecuación homogénea***. A partir de él se obtienen los valores de r para los cuales las funciones $y(t) = e^{rt}$ son soluciones de la ecuación diferencial.

Tres situaciones pueden presentarse en función de las posibles raíces del polinomio característico. Ellas son:

a) Tener dos raíces reales distintas

b) Tener una única raíz real con multiplicidad 2

c) Tener 2 raíces complejas conjugadas

<u>CASO A:</u> Dos raíces reales distintas

Si r_1 y r_2 son las raíces del polinomio característico, las dos soluciones de la ecuación diferencial asociadas son $y_1(t) = e^{r_1t}$ y $y_2(t) = e^{r_2t}$.

Estas soluciones son linealmente independientes ya que:

$$W[y_1, y_2](t) = r_2e^{r_1t}\,e^{r_2t} - r_1e^{r_1t}\,e^{r_2t} = (r_2 - r_1)e^{r_1t}\,e^{r_2t} \neq 0$$

Luego la solución general será:

$$y_H(t) = c_1\, e^{r_1 t} + c_2\, e^{r_2 t}$$

<u>CASO B:</u> Una única raíz real con multiplicidad 2

Si r_1 es la única raíz del polinomio característico, una de las dos soluciones de la ecuación diferencial asociada será $y_1(t) = e^{r_1 t}$. La otra solución la podemos hallar por reducción de orden, luego $y_2(t) = v(t).y_1(t)$ donde $v(t) = \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2} dt$. En nuestro caso $p(t) = \frac{b}{a}$ con lo cual $v(t) = \int 1\, dt = t$ y así $y_2(t) = t\ \ y_1(t) = t\, e^{r_1 t}$.

Estas soluciones son linealmente independientes ya que:

$$W[y_1, y_2](t) = e^{r_1 t}(e^{r_1 t} + r_1 t\, e^{r_1 t}) - r_1 e^{r_1 t} t\, e^{r_1 t} = (1 + r_1 t - r_1 t) e^{2 r_1 t} = e^{r_1 t} \neq 0$$

Luego la solución general será:

$$y_H(t) = c_1\, e^{r_1 t} + c_2\, t\, e^{r_1 t}$$

<u>CASO C:</u> Tener 2 raíces complejas conjugadas

Si planteáramos las soluciones $y_1(t) = e^{r_1 t}$ y $y_2(t) = e^{r_2 t}$, estaríamos teniendo como soluciones funciones a valores complejos.

¿Cómo son estas soluciones?

Pensemos en escribir el complejo según la fórnula de Euler, para esto primero debemos expresar $r_1 = \alpha + \beta i$ y $r_2 = \alpha - \beta i$ y así tenemos que:

$$y_1(t) = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\, sen\ (\beta t))$$

$$y_2(t) = e^{(\alpha-\beta i)t} = e^{\alpha t}\big(\cos(-\beta t) + i\, sen\ (-\beta t)\big) = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) - i\, sen\ (\beta t)\big)$$

Debemos construir a partir de estas funciones a valores complejos funciones a valores reales que sean soluciones linealmente independientes de la ecuación a resolver.

¿Cómo construimos funciones a valores reales a partir de $y_1(t)$ e $y_2(t)$?

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= e^{(\alpha+\beta i)t} + e^{(\alpha-\beta i)t} \\ &= e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\, sen\ (\beta t)\big) + e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) - i\, sen\ (\beta t)\big) \\ &= 2\, e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= e^{(\alpha+\beta i)t} - e^{(\alpha-\beta i)t} \\ &= e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\, sen\ (\beta t)\big) - e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\, sen\ (\beta t)) \\ &= 2i\, e^{\alpha t}\, \mathrm{sen}(\beta t) \end{aligned}$$

¿Serán 2 $e^{\alpha t}\, cos(\beta t) y\;\; 2i\, e^{\alpha t}\, sen(\beta t)$ soluciones de la ecuación homogenea?

<u>Lema:</u> Sea $y(t) = u(t) + i\, v(t)$ una solución a valores complejos de la ecuación homogénea (1) con $a, b, c \in R; a \neq 0$. Entonces $y_1(t) = u(t)$ y $y_2(t) = v(t)$ son soluciones de (1) y son funciones reales.

Demostración: $y(t) = u(t) + i\, v(t)$ es solución de (1), luego:

$$a(u'' + i\, v'') + b(u' + i\, v') + c(\, u + i\, v) \;= 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} au'' + bu' + cu \;= 0 \\ i\,(av'' + bv' + cv) \;= 0 \end{cases}$$

Luego $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones de (1).

A partir del lema sabemos, que despreciando las constantes,

$$u(x) = \; e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$v(x) = \; e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)$$

son soluciones de la homogénea. ¿Serán linealmente independientes?

$$W[u,v](t) = \beta e^{2\alpha t} \cos^2(\beta t) - \alpha e^{2\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) \cos(\beta t) + \alpha e^{2\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) \cos(\beta t) \\ + \beta e^{\alpha t} sen^2\,(\beta t) = \beta\, e^{2\alpha t}\,(\cos^2(\beta t) + sen^2\,(\beta t)) = \beta\, e^{2\alpha} \neq 0$$

Luego, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H(t) = c_1 e^{\alpha} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha} sen\,(\beta t) = e^{\alpha}\big(c_1 \cos(\beta t) + c_2 sen\,(\beta t)\big)$$

Ejemplo 1:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Los valores de r que satisfacen la ecuación son: 1 y 2. Luego la ecuación tiene dos soluciones distintas por lo cual las soluciones linealmente independientes serán: $y_1(t) = e^t$ y $y_2(t) = e^{2t}$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

La raíz de la ecuación es 2 con multiplicidad 2. Luego la ecuación tiene una única solución, o dos raíces iguales. Luego, las soluciones linealmente independientes serán: $y_1(t) = e^{2t}$ y $y_2(t) = t\, e^{2t}$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H(t) = c_1\, e^{2t} + c_2 t\, e^{2t}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

Las raíces de la ecuación son $2 + i$ y $2 - i$. Dado que las raíces son complejas, las soluciones linealmente independientes serán: $y_1(t) = e^{2t}\cos(t)$ y $y_2(t) = e^{2t} sen(t)$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H(t) = c_1\, e^{2t}\cos(t) + c_2\, e^{2t} sen(t)$$