Método de Variación de Parámetros

Introducción al Cálculo Diferencial e Integral

UNCPBA

13-05-16

Sea la Ecuación Diferencial Ordinaria de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

donde $P(x)$,$Q(x)$ y $R(x)$ son cualquier función.

(Observar que se encuentra normalizada)

En este caso no estamos pidiendo ni que los coeficientes sean constantes ni que $R(x)$ tenga alguna estructura especial.

Estamos en el **caso más general**.

Una técnica similar al método de reducción de orden saldrá nos permitirá resolver la situación

$$\boxed{\textbf{Variación de parámetros}}$$

Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Para solucionar la ecuación inhomogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Proponemos como candidato

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Calculamos las derivadas

$$\begin{aligned} y_p &= uy_1 + vy_2 \\ y_p' &= u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2' \end{aligned}$$

Notar que antes de calcular la derivada segunda de y_p, podemos ver que vamos a tener derivadas segundas de u y v que pueden ser muy difíciles de tratar.

Para evitar esto pedimos que:

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

Quedando entonces

$$\begin{aligned} y_p &= uy_1 + vy_2 \\ y_p' &= uy_1' + vy_2' \\ y_p'' &= u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' \end{aligned}$$

Insertando en la ecuación

$$u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' + P(x)\left[uy_1' + vy_2'\right] + Q(x)\left[uy_1 + vy_2\right] = R(x)$$

Insertando en la ecuación

$$u' y_1' + u y_1'' + v' y_2' + v y_2'' + P(x)\left[u y_1' + v y_2'\right] + Q(x)\left[u y_1 + v y_2\right] = R(x)$$

y reordenando un poco

$$\begin{aligned} u\left[y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1\right] &+ v\left[y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2\right] \\ &+ u' y_1' + v' y_2' = R(x) \end{aligned}$$

Pero como y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea obtenemos

$$u' y_1' + v' y_2' = R(x)$$

Ordenando lo que obtuvimos hasta ahora

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= R(x) \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (¿cuáles?)

Escribiéndolo en forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(x) \end{pmatrix}$$

Cuya solución (mediante el método del determinante, o Cramer) es

$$\begin{aligned} u' &= \frac{-y_2(x)R(x)}{W[y_1, y_2]} \\ v' &= \frac{y_1(x)R(x)}{W[y_1, y_2]} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{-y_2(x)R(x)}{W[y_1, y_2]}dx \\ v &= \int \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1, y_2]}dx \end{aligned}$$

y finalmente:

$$y_p = \quad y_1(x)\int \frac{-y_2(x)R(x)}{W[y_1,y_2]}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)R(x)}{W[y_1,y_2]}dx$$

Ejemplo

Consideremos la ecuación

$$y'' - y = \frac{1}{cosh(x)}$$

con solución de la ecuación homogénea

$$\begin{aligned} y_1 &= e^t \\ y_2 &= e^{-t} \end{aligned}$$

Ejemplo

Calculamos el wronskiano

$$W[y_1, y_2] = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2$$

Con las funciones objetivo

$$u = \int \frac{-y_2(x)R(x)}{W[y_1, y_2]} dx = \int \frac{-exp(-x)\frac{1}{cosh(x)}}{-2} dx$$

$$v = \int \frac{y_1(x)R(x)}{W[y_1, y_2]} dx = \int \frac{exp(x)\frac{1}{cosh(x)}}{-2} dx$$

Ejemplo

Obteniendo, finalmente

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\left[2x - ln(exp(2x) - 1)\right] \\ y(x) &= -\frac{1}{2} ln(exp(2x) - 1) \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{2}\left[2x - ln(exp(2x) - 1)\right] exp(x) - \frac{1}{2} ln(exp(2x) - 1) exp(-x) \tag{1}$$

Generalizacion

Dada la ecuación diferencial de orden n:

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (2)$$

Podemos encontrar la solución particular haciendo un planteo similar al que hicimos en el caso de orden 2.

Generalizacion

Haciendo suposiciones similares al caso bi-dimensional se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \dots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Utilizando nuevamente el método de Cramer (y abusando un poquito de la notación) podemos determinar

$$u_i = \int \frac{W[y_1, y_2, \dots, g(x), \dots, y_n]}{W[y_1, y_2, \dots, y_n]} dx$$

Ejemplo 2

La ecuación es

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - 2\frac{1}{x^2}y' + 2\frac{1}{x^3}y = 2x$$

con solución de la ecuación homogénea

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x \\ y_2(x) &= x^2 \\ y_3(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calculamos los wronskianos

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, y_3] &= \frac{6}{x} \\ W[g(x), y_2, y_3] &= -6x \\ W[y_1, g(x), y3] &= 4 \\ W[y_1, y_2, g(x)] &= 2x^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Las funciones objetivo son

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \int \frac{\frac{-6}{x}}{6x} dx \\
u_2(x) &= \int \frac{4}{6x} dx \\
u_3(x) &= \int \frac{2x^3}{6x} dx
\end{aligned}
$$

y ahora puede calcularse la solución particular.