INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

CURSADA 2016

PROGRAMA INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: 2016

Unidad I:
Naturaleza de las ecuaciones diferenciales, definición, grado, diferencia entre ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales. Interpretación gráfica: Curvas Integrales, Teorema de Picard, monotonía, concavidad, simetría, singularidad e isoclinas.

Unidad II:
Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, factor integrante, Ecuaciones a variables separables Ecuaciones homogéneas. Ecuaciones exactas. Aplicaciones: Trayectoria Ortogonal, crecimiento, desintegración, mezclas etc.

Unidad III
Métodos de aproximación numérica de Euler, Euler mejorado y Runge Kuta.

Unidad IV:
Espacio solución: dimensión del espacio solución, Wronskiano. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Teorema de Abel. Reducción de Orden. Resolución de la ecuación homogénea a coeficientes constantes. Método de coeficientes indeterminados. Método de variación de parámetros. Aplicaciones.

Unidad V:
Sistemas de ecuaciones de primer orden: generalidades sobre sistemas, sistemas lineales, sistemas lineales homogéneos a coeficientes constantes. Métodos por operadores y por autovectores y autovalores. Sistemas lineales inhomogeneos. Aplicaciones

Unidad VI:
Sistemas autónomos lineales. Tipos de puntos críticos. Estabilidad. Trayectoria. Sistemas autónomos no lineales. Aplicación: Sistema presa predador de Volterra.

Bibliografía:

- ✓ Braun, M ; Differential Equations and their Applications. Springer, New York 1991.
- ✓ Lomen, D & Lovelock, D; Exploring Differential Equations via Graphics and Data. John Wiley, New York, 1996.
- ✓ Boyce, W, Di Prima, R; Introducción a las Ecuaciones Diferenciales, Jhon Wiley, New York, 1970.
- ✓ Simmons, G; Robertson, J Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones, McGraw- Hill, New York, 1993.

Práctico N° 1- Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

1) Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales según sean ordinarias o parciales. Determinar orden y grado de las mismas, como así también la función desconocida y la variable independiente.

a) $y' = x^2 + 5y$ b) $y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$ c) $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}$

d) $\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^3 = s - 3t$ e) $\frac{dr}{dq} = \sqrt{rq}$

2) Verificar que $x^3 + 3xy^2 = 1$ es una solución implícita de la ecuación diferencial, $2xy\,\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$ en el intervalo $0 < x < 1$.

3) En cada uno de los siguientes ítems, se describe una función *y = g(x)* por medio de alguna propiedad de su gráfico. Escribir una ecuación de la forma *y' = f(x, y)* que tenga a *g(x)* como solución (o como una de sus soluciones).

a. La pendiente del gráfico de g en el punto (x, y) es la suma de x e y.
b. La tangente al gráfico de g en el punto (x, y) interseca al eje x en el punto (x/2, 0).
c. Toda línea recta perpendicular al gráfico de g pasa por el punto (0, 1).

4) Escribir una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación descripta.

a. La aceleración de un auto deportivo es proporcional a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad del auto.
b. En una población fija de P habitantes, la razón de cambio del número N de personas que han escuchado cierto rumor es proporcional al número de personas que aún no lo han escuchado.
c. En una población fija de P habitantes, la razón de cambio del número N de personas infectadas con una enfermedad es proporcional al número de personas infectadas y al número de personas no infectadas.

5) Los cambios en el número de individuos de una población dependen de un balance entre el número de nacimientos y muertes. Si b es una constante que representa el número de nacimientos por individuo y por unidad de tiempo y m es lo mismo, pero en términos de mortalidad, entonces $dP/dt = bP - mP$. Luego $dP/dt = (b-m)P$, donde $r = b-m$ es la tasa intrínseca de crecimiento. Este es el modelo de crecimiento exponencial de poblaciones. a) Analizar qué ocurre con la población cuando $b < m$, $b = m$ y $b > m$. b) Bosquejar el comportamiento de *P(t)* a los largo del tiempo, asumiendo $P(0) = P_0$, en los tres casos. c) Encontrar una expresión para *P(t)*. d) Graficar luego la solución para tres valores diferentes de la constante C.

6) Durante décadas, las ballenas han sido cazadas, llegando a valores mínimos extremos de 5000 individuos en el año 1978. En condiciones óptimas, la tasa intrínseca de crecimiento fue de 0.047 año-1. Asumiendo un crecimiento exponencial. a) Plantear la ecuación diferencial. b) Graficar el campo de direcciones e isoclinas. c) ¿Cuántos años tardaría la población en alcanzar 50.000 individuos? ¿Y 150.000?

7) Los procesos de decaimiento de un material radiactivo o de eliminación de drogas en sangre pueden modelarse siguiendo el mismo proceso que el descripto en el crecimiento exponencial de poblaciones, pero considerando que no existe el término de natalidad, sino solo el término de mortandad negativo denominado, en estos casos, tasa específica de desintegración o de decaimiento, que indica una destrucción o de eliminación de materia en cada caso.

a. Plantear la ecuación diferencial para estos casos indicando las unidades de la variable dependiente y del parámetro r en la ecuación.
b. Graficar el campo de direcciones y algunas soluciones para condiciones iniciales dadas.

8) La vida media VM, de un isótopo radiactivo se define como el tiempo necesario para que la mitad de su masa se desintegre.

a. Hallar V_M y verificar que es independiente del tiempo inicial.
b. Calcular la V_M del C^{14}, sabiendo que r = 0.000120.

9) Todos los organismos vivos poseen C^{14} en pequeñas cantidades, dado que toman la parte del mismo que se encuentra en la atmósfera ($6x10^{10}$ átomos de C^{14} por gramo de C^{12}) a través del CO_2 utilizado en el proceso de fotosíntesis de los productores primarios. A partir de allí, continúa el proceso a través de la cadena trófica llegando a consumidores. Cuando el organismo muere, deja de incorporar C^{14} y comienza el proceso de decaimiento del mismo. Si consideramos que A_0 era la cantidad presente en el organismo al momento de su muerte y A_1 la cantidad medida en el momento en el cual se quiere realizar la determinación, la solución de la ecuación que modela el proceso será: $A_1 = A_0 e^{-kt}$. Demuestre que la expresión de la edad, despejando el tiempo de la solución dada y considerando la vida media y la tasa de decaimiento del C^{14}, es $t \approx 8.310 \ln \frac{A_0}{A_1}$.

10) La variación de la temperatura de un objeto, o tasa de cambio de la temperatura, es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto en cada tiempo y la del ambiente exterior al cual se lo somete. Ésta es la ley de enfriamiento de Newton. a) Exprese la ecuación diferencial que modela este fenómeno. b) Encuentre la solución general. c) Aplique el modelo para resolver el siguiente problema: Al sacar una torta del horno, su temperatura es 150°C y después de 3 minutos de 90°C. Si la temperatura ambiente es de 20°C, a) Plantee el modelo y grafique el campo de pendientes e isoclinas, b) ¿Cuál será la temperatura de la torta a los 10 minutos? c) ¿Cuándo la temperatura de la torta alcanza los 20°C?

11) Resolver las ecuaciones de variables separables:

a. $4xy\,dx + (x^2+1)dy = 0$
b. $(xy + 2x + y + 2)dx + (x^2 + 2x)dy = 0$
c. $2r(s^2+1)dr + (r^4+1)ds = 0$
d. $cosec\ y\,dx + \sec x\,dy = 0$
e. $(e^x + 1)\cos(u)\,du + \ e^x(sen(u) + 1)\,dy = 0$
f. $tg\ \theta\ dr + 2r\ d\theta = 0$

12) Resolver los problemas de valor inicial

a. $(y+2)dx + y(x+4)dy = 0; \quad y(-3) = -1$
b. $8\cos^2 y\,dx + \ cosec^2 x\,dy = 0; \quad y(\pi/12) = \pi/4$

13) Usar los conceptos de monotonía, concavidad, simetría, singularidad, isoclinas y unicidad para dibujar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a)\frac{dy}{dx} = x^3, \quad P(1,1) \qquad b)\frac{dy}{dx} = x^4, \quad P(1,1) \qquad c)\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad P(0,0)$$

$$d)\frac{dx}{dt} = sent, \quad P(p,2) \qquad e)\frac{dy}{dt} = e^{-t}, \quad P(0,1) \qquad f)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}, \quad P(1,1)$$

$$g)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(x-1)}, \quad P(2,1) \qquad h)\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \quad P(1,p/4)$$

$$i)\frac{dy}{dt} = \ln t, \quad P(1,1) \qquad j)\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-x}, \quad P(0,1)$$

Práctico Nº 2: Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1

1) Resolver las ecuaciones diferenciales lineales:

a. $y' - 3x^2y = x^2$ **b.** $y' + y\,tg(x) = sec(x) + 2x\,cos(x)$ **c.** $y' - 3y = 2$

d. $xy' + (1+x)y = 5$ **e**. $x^2dy + (2xy - e^x)dx = 0$ **f.** $y' + y\,tg(x) = sen(x)$

g. $y' + 2y = e^{2x}$ **h.** $y' + y\,cotg(x) = 4x^2\,cosec(x)$ **i.** $xy' + (2+3x)y = xe^{-3x}$

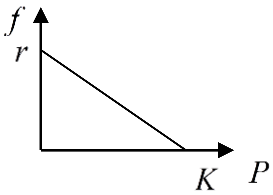
j. $xy' + y + x = e^x$ **k.** $x^2dy + (x - 3xy + 1)dx = 0$ **l.** $x^{-1}y' + 2y = 3$

2) Encontrar la solución particular de la ecuación que satisface la condición dada:

a. $xy' - y = x^2 + x;\quad y(1) = 2$
b. $y' + 2y = e^{-3x};\quad y(0) = 2$
c. $xy' + y + xy = e^{-x};\quad y(1) = 0$

3) Una ciudad tenía una población de 25000 habitantes en 1970 y una población de 30000 habitantes en 1980. Suponiendo que la población continuará creciendo exponencialmente a una razón constante, ¿Qué población se puede esperar para el año 2020?

4) Las poblaciones descriptas en los ejercicios anteriores crecen indefinidamente a tasa constante, $\mathrm{dP/dt} = \mathrm{rP},\ \mathrm{r} > 0$. En la realidad, el ambiente le impone un límite al crecimiento de la población disminuyendo su tasa de crecimiento. Esta situación se puede reflejar proponiendo una función lineal, f(P), decreciente tal que $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{f(P)P}$ como se observa en la figura siguiente, donde K representa la capacidad máxima de carga del ambiente.



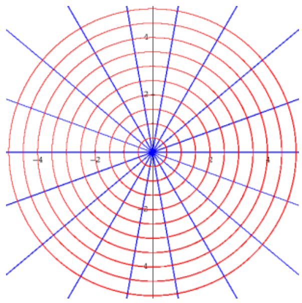
a) Plantear la ecuación diferencial para esta función. (Ecuación logística, denso dependencia)

b) Encontrar la expresión de *P(t)*.

c) Determinar el comportamiento de la solución para valores iniciales de población $P_0 < K$, $P_0 = K$ y $P_0 > K$ y bosquejar las soluciones que ilustren las condiciones iniciales anteriores.

5) En 1934, Gause realizó experimentos de competición involucrando dos especies de protozoos (*Paramecium caudatum* y *Paramecium aurelia*). Cuando cada población se cultivó de manera separada, las expresiones logísticas que ajustó fueron: $N_1(t) = \dfrac{105}{1+34e^{-1.1244t}}$ y $N_1(t) = \dfrac{64}{1+15e^{-0.794t}}$. Determine, para ambas poblaciones: a) población inicial, b) capacidad de carga, c) ecuación diferencial correspondiente d) tiempo donde el crecimiento es mayor

6) Dadas dos curvas C_1 y C_2 que se cortan en un punto (x, y) diremos que se cortan ortogonalmente si sus rectas tangentes en dicho punto son ortogonales. Dada una familia de curvas que depende de un parámetro $h(x, y, c) = 0$ diremos que una curva C es una trayectoria ortogonal a dicha familia si en cada punto en que C corta a una curva de la familia lo hace ortogonalmente, es decir, las dos rectas tangentes en el punto de corte son perpendiculares. Asimismo, dadas dos familias de curvas Y_1 y Y_2 , diremos que la familia de curvas Y_2 son las trayectorias ortogonales a la familia Y_1 si cada curva de la familia Y_2 corta ortogonalmente a la familia Y_1 y toda curva ortogonal a esta última familia pertenece a Y_2.



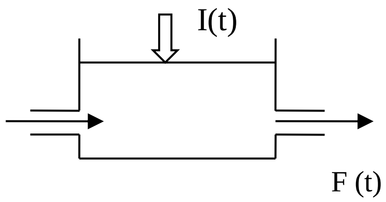
Dada una familia de curvas uniparamétrica $h(x,y,c)=0$ nos planteamos cómo obtener la familia de sus trayectorias ortogonales. Supongamos que conocemos la ecuación diferencial y $y'=f(x,y,c)$ de la familia $h(x,y,c)=0$. Fijamos un punto (x,y) de una de las curvas de la familia $h(x,y,c)=0$. La pendiente de su recta tangente es $f(x,y)$. Recordemos que dos rectas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son ortogonales si, y sólo si $m_1.m_2=-1$. Por tanto, la pendiente de cualquier curva ortogonal a ella en el punto (x,y) es $-\dfrac{1}{f(x,y)}$. Y esta nueva curva debe ser solución de la ecuación diferencial $y'=-\dfrac{1}{f(x,y)}$. En resumen, si disponemos de la ecuación diferencial de una familia de curvas, la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales se obtiene sustituyendo en la ecuación anterior y' por $-\dfrac{1}{y'}$.

a. Dada la familia de curvas integrales $x^2+y^2=c$. Determinar la familia de trayectorias ortogonales.

b. Calcular el valor de K para que las parábolas $y=c_1\,x^2+K$; sean trayectorias ortogonales de la familia de elipses $x^2+2y^2-y=c_2$.

c. Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y=cx^2$.

7) Dado un compartimento como el de la figura con un volumen V fijo [capacidad] conteniendo una sustancia que se renueva a través de una entrada y salida que permite un flujo de caudal expresado por F(t) [capacidad/tiempo]. Una nueva sustancia, en general denominada traza, y(t) [masa], es agregada y mezclada dentro del tanque a una tasa I(t) [masa/tiempo]. Plantee la ecuación diferencial que modela la variación de la cantidad de trazador dentro del compartimento si ésta es la diferencia de sustancia entrante y saliente del volumen considerado en cada instante de tiempo



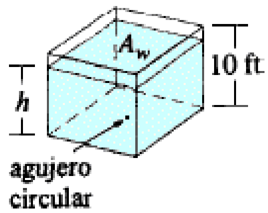
8) En un tanque de 500 litros hay un flujo de agua de 10 litros/segundo.

a. Si se arrojan al tanque 20 kg de sal, 1) Plantee el modelo y grafique el campo direcciones. 2) ¿Cuánto tiempo tomará que la cantidad remanente de sal sea de 5 kg?
b. Si inicialmente el tanque no tenía sal y en un determinado momento se comienzan a incorporar al tanque 3 kg de sal por segundo, 1) Plantee el modelo y grafique el campo direcciones. 2) ¿Cuánto tiempo debo esperar para que la cantidad de sal sea 50 kg?
c. ¿Y si la cantidad de sal que ingresa al tanque por segundo está dada por $f(t)=2\,t$?
d. Analizar cómo varió el modelo en función de los enunciados.

9) La tasa de crecimiento de un pez es directamente proporcional a $L_\infty - L$, donde L_∞ es la longitud máxima que puede alcanzar la especie, y L es la longitud del pez en el instante que es estudiado. a) Encontrar la expresión que exprese la longitud del pez en cualquier instante de tiempo. b) Sabiendo que en los peces existe una relación entre peso y longitud dada por $W = \alpha L^{\nu}$. Escribir la ecuación que describa la variación de peso en función del tiempo y la expresión del peso del pez en cualquier instante de tiempo dado.

10) Se sabe que una pelota se infla a razón de 20 pies3/s. ¿A qué velocidad se incrementa el radio de la pela cuando su diámetro es de 1pie? (Recuerde que $V = (4/3)\,\pi\, r^3$).

11) Por un agujero circular de área A, en el fondo de un tanque, sale agua. El agua del tanque se reduce por segundo a $cA(2gh)^{1/2}$, donde $0<c<1$. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la altura h del agua en cualquier momento t, que hay en el tanque de la figura. El radio del agujero es de 2 pulgadas y $g=32$ pies/s^2



12) La aceleración representa la variación de la velocidad y se expresa como $a = \frac{dv}{dt}$. La segunda ley de Newton expresa que podemos relacionar la masa de un cuerpo con la acelaración que alcanza al aplicarle fuerzas exteriores mediante la ecuación $F = m\,a = m\,\frac{dv}{dt}$. Un modelo simple de caída libre considerando la resistencia del aire está dado por la expresión $m\,\frac{dv}{dt} = mg - kv$, considerando que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad de caída y en sentido contrario a la misma y que el peso del cuerpo se puede expresar como el producto entre su masa y la aceleración de la gravedad.

a. Encontrar la solución para $v(t)$ de la ecuación planteada considerando $v(0) = 0$.
b. Determinar la expresión para la velocidad límite, considerando que la misma se define como el límite de la solución para $t \to \infty$
c. Aplicar el modelo para resolver el siguiente problema: Se arroja un cuerpo de 6 kg desde la terraza de un edificio. Asumiendo que la magnitud de la resistencia del aire en cada instante es igual al doble de la magnitud de la velocidad, hallar la velocidad y la distancia recorrida al cabo de t segundos.

Más problemas!!!

13) Un cultivo de bacterias duplica su tamaño cada 6hs. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar 5 veces su tamaño original?

14) 5 gr de una sustancia radiactiva decaen a 4.1 gr en 4 días. Encontrar la vida media y la tasa específica de decaimiento.

15) Se calienta agua para mate, pero el cebador se distrae y el agua alcanza los 110ºC. La pava se deja entonces a temperatura ambiente, que en ese día otoñal ronda los 10ºC. Luego de media hora, el agua está a 60º ¿En cuánto tiempo alcanzará los 30ºC?

16) El flujo de agua a través de un tanque de 500 litros es de 10 litros/seg. Si se arrojan al tanque 20 Kg de sal, ¿cuánto tiempo tomará que la cantidad remanente de sal sea de 5 Kg?

17) La media vida del cobalto radiactivo es 5,27 años. Supongamos que un accidente nuclear ha dejado el nivel de radiación de cobalto en una cierta región 100 veces más alto que el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuántos años deberán pasar hasta que la región se vuelva habitable?

18) Después de que te aplican un antibiótico inyectable, la concentración de la droga en el cuerpo disminuye al 50% en 10hs. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que la droga alcanza el 10% de la concentración original?

19) Si la vida media de una sustancia es 1600 años ¿qué proporción quedará al cabo de 2400 años? ¿Y de 8000 años?

20) Se arroja un cuerpo de 6 kg desde la terraza de un edificio. Asumiendo que la magnitud de la resistencia del aire en cada instante es igual al doble de la magnitud de la velocidad, hallar la velocidad y la distancia recorrida al cabo de t segundos.

21) Por razones obvias, la sala de disección de un forense se mantiene a una temperatura constante de 5ºC. Ocurre un crimen. Mientras realiza la autopsia de la víctima, el forense es asesinado, y el cuerpo del delito robado. A las 7 hs, el ayudante del forense descubre su cadáver a 23ºC; al mediodía, su temperatura es de 16ºC. Si la temperatura normal de un cuerpo puede asumirse en 37ºC ¿a qué hora murió el forense, aproximadamente?

22) Un modelo de crecimiento de población estacional propone que la tasa de crecimiento puede ser expresada en la forma; $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k\,\text{sen}\,2\pi t$, donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde al comienzo de la primavera. De esta forma, la población crecerá durante la primavera y el verano, y decrecerá en otoño e invierno.

a. Plantear la ecuación diferencial correspondiente dado que $N(1/2) = N_0$.
b. De acuerdo al modelo planteado, ¿cuándo se tiene el máximo nivel de población?

23) Hallar la trayectoria ortogonal a $y = c/x$.

24) Un depósito de 100 litros de capacidad contiene 20 litros de agua en la que hay disueltos 10 gramos de sal. A partir de cierto instante se vierten en el depósito 4 litros por minuto de agua que contienen 2 gramos de sal por litro, mientras que se deja salir la disolución bien mezclada a un ritmo de 2 litro por minuto. (a) Encontrar la ecuación que modele la cantidad de sal en el depósito en cada instante. (b) ¿Cuál es la concentración de sal en el momento en que el depósito se llena?

25) Un reactor convierte el uranio 238 relativamente estable en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que se desintegró 0.043% de la cantidad inicial A_0 de plutonio. Calcule la vida media de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

26) Un vaso de agua a 25 ^{o}C se introduce en un congelador a -20 ^{o}C. En 15’ el agua está ya a 20 ^{o}C. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar el agua a cero grado?

27) Un paracaidista de masa *m* se lanza de un avión y abre el paracaídas a una altura h_o del suelo, cuando ha adquirido en caída libre una velocidad v_o. Si al lanzarse, el paracaidista tenía velocidad nula, ¿a qué altura estaba el avión en el momento del lanzamiento? (considerar la fuerza de rozamiento del aire proporcional a la velocidad)

28) El 2% de los alumnos de los alumnos que cursan matemática difunden a las 12 hs. del lunes el rumor de que el martes a las a las 11 hs. tendrán un examen sorpresa. Sabiendo que el lunes a las 14hs la noticia es conocida por el 5% de los alumnos ¿cuál es el porcentaje de alumnos que a la hora de comienzo de la clase del martes conocen la noticia? (el rumor se transmite proporcional al número de encuentros entre alumnos que conocen la noticia y aquellos que no la conocen).

29) Se encuentra un hueso fosilizado que contiene una milésima de la concentración de C-14 que se encontraba en la materia viva. Si se sabe que la vida media del C-14 es de 5700 años, estime la edad del fósil.

30) Una colonia de bacterias crece de acuerdo con la ley logística, con una capacidad de carga de 5.108 individuos y una tasa de crecimiento natural r = 0.01 día^{-1}. a) ¿Cuál será la población después de 3 días si

inicialmente era de 108 individuos? b) Si la población inicial fue de 8.108, la población crecerá o decrecerá? Justifique.

31) Suponga que una gota de agua se evapora a una velocidad proporcional a su área superficial. Si originalmente el radio es de 3 mm y una hora después se ha reducido a 2 mm, encontrar una expresión para el radio de la gota como función del tiempo ¿Cuánto tardará en desaparecer?

32) Un Hombre provisto de un paracaídas se lanza desde una gran altura. El peso conjunto entre el hombre y el paracaídas es de 98 Kg. Sea v(t)(la velocidad 8 en metros por segundos)t segundos después del lanzamiento. Durante los 10 primeros segundos, antes de abrirse el paracaídas se supone que la resistencia del aire es de 0,1v(t) kg. Después una vez abierto el paracaídas, la resistencia del aire es 2v(t). Suponiendo que la aceleración de la gravedad es 9,8m/s2. Hallar una expresión adecuada para la velocidad v(t) y el espacio recorrido.

33) El radio 226 tiene una vida media de 1620 años. Encuentre el período de tiempo en que un cuerpo de este material se reduce a tres cuartas partes de su tamaño original.

34) Un contenedor es arrastrado por el hielo en un trineo, incluido el trineo, el peso total es de 80 libras. Suponiendo que es despreciable la resistencia del hielo y que el aire opone una resistencia en libras igual a 5 veces la velocidad (en pies/seg) del trineo. (Sabiendo que la gravedad es de 32pies /seg^2), encontrar: a) la fuerza constante ejercida por el trineo para obtener una velocidad terminal de 10 millas por hora. b) La velocidad y distancia recorrida al cabo de 48 segundos

Práctico N° 3: Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1) Utilice los tres métodos para estimar $y(1)$ si $y' = -y;\ y(0) = 1$ considerando tres pasos diferentes.

2) Dado el PVI $xdy + 2ydx = 0;\ y(2) = 1$,

   a. Aproximar numéricamente la solución por el método de Runge Kutta en *X=2.4*
   b. Comparar el error con dos pasos *h=0.2* y *h=0.1*.

3) Estimar $y(0.2)$ de la ecuación $y' - 3x - 3y = 0, y(0) = 1$ utilizando el método de Runge Kutta tomando h=0.1. Luego comparar con la solución exacta.

4) Estimar $y(0.02)$ de la ecuación $y' = 2x + 2y, y(0) = 1$ utilizando el método de Euler mejorado y Runge Kutta comparando con la solución exacta.

5) Para la población de ballenas azules del ejercicio 7 del práctico 1, estimar el número de ballenas que hubo en 1998 mediante una aproximación numérica.

6) Sobre la base del problema 10.a del práctico 2,

   a. estimar la cantidad sal en el tanque luego de 50 seg, utilizando Euler mejorado y dos pasos diferentes.
   b. calcular el error cometido al trabajar con cada paso.

7) Estimar $y(-2.5)$ de la ecuación $(y+2)dx + y(x+4)dy = 0;\quad y(-3) = -1$ utilizando el método de Euler mejorado y Runge Kutta comparando con la solución exacta que fue obtenida en 3.5.a).

Práctico Nº 4: Ecuaciones diferenciales homogeneas y exactas

1) Resolver las ecuaciones homogéneas y problemas de valores iniciales
   a. $(x+y)dx - x\,dy = 0$
   b. $(2xy+3y^2)dx - (2xy+x^2)dy = 0$
   c. $v^3du + (u^3+uv^2)dv = 0;\qquad v(3) = 9$
   d. $(x^2+3y^2)dx - 2xy\,dy = 0;\quad y(2) = 6$

2) Resolver las siguientes ecuaciones reducibles a homogéneas:
   a. $(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0$
   b. $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$
   c. $(2x-4y)dx + (x+y-3)dy = 0$

3) Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y en ese caso, resolverlas.
   a) $y^2dx + 2xy\,dy = 0$
   b) $(3\,x^2+4xy)dx + (2\,x^2+2y)dy = 0$
   c) $(2x\,cos\,y + 3x^2y)dx + \;(x^3 - \;x^2\,sen\,y - y)dy = 0$
   d) $(e^{2y} - y\cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)\,dy = 0$
   e) $(\cos x\;senx - xy^2)dx = y(x^2-1)dy;\;\; y(0) = 2$
   f) $(x+2y^2)dx + xy\,dy = 0$

4) En cada uno de los siguientes problemas determinar la constante a para que la e.d. sea exacta, y entonces resolverla:
   a) $t + y\,e^{2ty} + at\,e^{2ty}\frac{dy}{dt} = 0$
   b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}\frac{dy}{dt} = 0$
   c) $\mathrm{e}^{at+y} + 3t^2y^2 + (2yt^3 + \mathrm{e}^{at+y})\frac{dy}{dt} = 0$

5) Para cada una de las ecuaciones siguientes encontrar si es posible un factor de integración que dependa de una sola variable. En caso de obtenerlo resolver la ecuación.
   a) $(x+y^2)dx + xy\,dy = 0$
   b) $2ydx + (x+y)\,dy = 0$
   c) $(xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0$
   d) $(5y-x^2)dx + xdy = 0$
   e) $(x+y-xy)dx + xdy = 0$
   f) $(u+5t)du + 3u\,dt = 0$

6) Mediante un estudio se observó que la variación de la cantidad de pastura por hectárea en función de la carga ganadera está dada por la siguiente ecuación: $dy/dx = (2y - x^2)/(-2x + y)$. Encontrar una expresión para la función que permite conocer la cantidad de pastura por hectárea en función de la carga ganadera del lugar.

7) Cuando dos especies coexisten en un mismo ambiente, la variación en la abundancia de la especie 2 (y) es en función de la abundancia de la especie 1 (x) y viceversa. Consideremos que la abundancia de la especie 2 varía según la ecuación:
   a. $dy/dx = (-x+2y)/(2x-y)$.
   b. $dy/dx = (-2x+4y-6)/(x+y-3)$.
   c. $dy/dx = (x-y-1)/(x-y-2)$.

En cada caso encontrar una función que describa la abundancia de la especie 2 en función de la abundancia de la especie 1.

8) Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de:
   a. circunferencias dadas por: $x^2 + y^2 = 2cx$,
   b. todas las circunferencias que pasan por el origen y tienen centro en el eje x.

Práctico N° 5: Ecuaciones Lineales de 2° orden

1- Wronskiano – conjunto fundamental de soluciones

1.

a Verificar que $y_1 = \sqrt{t}$ y $y_2 = 1/t$ son soluciones de la ecuación diferencial $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$ sobre el intervalo $0 < t < \infty$.

b Evaluar $W[y_1, y_2](t)$. ¿Qué ocurre cuando $t \to 0$?

c Mostrar que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación dada en el intervalo $0 < t < \infty$.

d Resolver el problema del valor inicial: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, y(1) = 2, y'(1) = 1$

2. Considerar la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$.

a Demostrar que cada una de las funciones e^x, e^{3x} es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo a<x<b donde a y b son reales positivos arbitrarios tales que a<b.

b ¿Por que podemos concluir que cada una de las funciones $5e^x + 2e^{3x}$, $6e^x - 4e^{3x}$; $-7e^x + 5e^{3x}$ es también una solución de la ecuación diferencial dada en a<x<b ?

c ¿Podemos afirmar lo mismo de $3e^x$; $-4e^x$; $5e^x$; $6e^x$ en a<x<b ?

3. Considerar la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

a Demostrar que e^{2x} y e^{3x} son soluciones L.I de esta ecuación en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

b Escribir la solución general de la ecuación dada.

c Determinar la solución que satisface las condiciones $y(0) = 2, y'(0) = 3$. Explicar por qué esta solución es única. ¿En que intervalo está definida?

2- Reducción de Orden

4. Encuentre una segunda solución para cada una de las ecuaciones diferenciales, utilizando el teorema de Abel:

a) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,\ y_1(x) = x$ b) $y'' + 2y' + yx = 0,\ y_1(x) = e^{-x}$ c) $xy'' + y' = 0,\ y_1(x) = 1$

d) $y'' + y = 0,\ y_1(x) = senx$ e) $y'' - y = 0,\ y_1(x) = e^x$

5. Mostrar que $y=x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0;\quad -1 < x < 1$ y encontrar una segunda solución linealmente independiente (Por el método de reducción de orden). Analizar los problemas de validez de las soluciones.

6. Encuentre una segunda solución para cada una de las ecuaciones diferenciales especificadas:

a) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,\ y_1(x) = x$ b) $xy'' + y' = 0,\ y_1(x) = 1$

c) $x^2y'' + 2xy' = 0,\ y_1(x) = 1,\ x > 0$ d) $xy'' - y' + \dfrac{1}{x}y = 0,\ y_1(x) = x, x > 0$

7. Mostrar que $y_1(x) = x^{-1/2}senx$ es solución de la ecuación de Bessel de orden $\alpha = 1/2$:

$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$, y encontrar una segunda solución linealmente independiente de y_1.

3- Ecuaciones Diferenciales de Orden dos no lineales (ausencia de variables).

8. Ausencia de variable independiente o Ausencia de variable dependiente:

$a)\ yy'' + (y')^2 = 0$ $\quad b)\ y'' + y' = 0$ $\quad c)\ yy'' - (y')^3 = 0$ $\quad d)\ xy'' + y' = 1,\ x > 0$

$e)\ 2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1$ $\quad f)\ y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ $\quad g)\ y'' + x(y')^2 = 0$ $\quad h)\ y'' + y(y')^3 = 0$

4- Ecuaciones Diferenciales de Orden dos lineales a coeficientes constantes

9. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales de orden dos con coeficientes constantes:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(1) = e^2\ \ e\ \ y'(1) = 3e^2$ $\qquad$ *b)* $y'' - 6y' + 5y = 0,\ y(0) = 3\ \ e\ \ y'(0) = 11$

c) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0\ \ e\ \ y'(0) = 5$ $\qquad$ *d)* $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1\ \ e\ \ y'(0) = 0$

e) $y'' + 4y' + 2y = 0,\ y(0) = -1\ \ e\ \ y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$ $\qquad$ *f)* $y'' + 8y' - 9y = 0,\ y(1) = 2\ \ e\ \ y'(1) = 0$

10. Comportamiento de las soluciones cuando $x \to \infty$**:**

a) Si a, b y c son constantes positivas, demuestre que todas las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ tienden a cero cuando $x \to \infty$.

b) Si a>0 y c>0, pero b=0. Demuestre que el resultado anterior deja de ser verdadero, pero que todas las soluciones son acotadas cuando $x \to \infty$.

c) Si a>0 y b>0, pero c=0, demuestre que el resultado de a) deja de ser cierto pero que las soluciones tienden a una constante que depende de las condiciones iniciales cuando $x \to \infty$. Determine esta constante para las condiciones iniciales $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$.

11. Resolver las ecuaciones lineales no homogéneas mediante el método de Variación de Parámetros:

a) $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ $\quad$ *b)* $y'' + y = sen\ t$ $\quad$ *c)* $y'' - y = 1/x$

d) $y'' + y = cos2\,x$ $\quad$ *e)* $y'' + y = sec\,x$ $\quad$ *f)* $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} / (1 + e^x)$

12. En los siguientes ejercicios resolver los problemas a valores iniciales lineales de orden dos donde $y(0) = 1, y'(0) = 0$

a) $y'' - y = xe^x$ $\qquad$ b) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

13. Aplicar el método de variación de parámetros, para hallar la solución general de:

$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$, $x > 0$,sabiendo que x , x^2 y $1/x$ son soluciones de la ecuación homogénea.

14. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes utilizando el método de coeficientes indeterminados:

a) $y'' - 3y' - 10y = 6e^{4x}$ $\qquad$ b) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

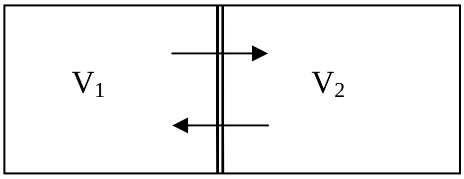
c) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$ $\qquad$ d) $y'' + 4y = 4cos\,2x + 6cos\,x + 8x^2 - 4x$

e) $y'' - 2y' + 2y = e^x senx$ $\qquad$ f) $y'' - 3y' + 2y = 14sen2x - 18cos\,2x$

Práctico Nº 6: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden

1. Considere el problema con valores iniciales $u'' + p(t)u' + q(t)\,u = g(t)$, $u(0) = u_o,\; u'(0) = u'_0$. Transforme este problema a un problema con valores iniciales para dos ecuaciones lineales de primer orden.

2. Ley de Fick (mecanismo de transporte): La tasa de transporte es directamente proporcional a la diferencia de concentración en los dos compartimentos.



La figura es una representación compartamental de la membrana celular, el fluido extracelular y el fluido dentro de la célula. Los componentes que necesita la célula para su crecimiento son transportados y pasan a través de la membrana mediante un mecanismo llamado *difusión pasiva* el cual es gobernado por la Ley de Fick.
Sean V_1 y V_2 los volúmenes correspondientes, $A_1(t)$ y $A_2(t)$ la cantidad de sustancia en cada compartimento y k el factor de permeabilidad. La concentración de sustancia en cada uno de los compartimentos queda definida entonces como $x(t) = A_1(t) / V_1$ e $y(t) = A_2(t) / V_2$. Siendo el volumen constante, $A'_1(t) = x'(t) * V_1$ e $A'_2(t) = y'(t) * V_2$ y aplicando la ley de Fick a la tasa de transporte de cantidad de sustancia obtenemos:

$$\begin{cases} A_1' = k\,(y - x) \\ A_2' = k\,(x - y) \end{cases} \quad \text{ó, equivalentemente,} \quad \begin{cases} x' = k/V_1\,(y - x) \\ y' = k/V_2\,(x - y) \end{cases}$$

3. Lleve el sistema de ecuaciones dado a una ecuación lineal de orden dos. Encuentre las soluciones y analice el comportamiento de las mismas a largo plazo. Bosqueje una gráfica de ambas en un mismo gráfico.

4. Una población de peces migra desde el lago 1 al lago 2. Sea x(t) el número de peces en el lago 1 e y(t) el número de peces en el lago 2. La tasa de migración entre los dos lagos se asume que está gobernada por la ley de Fick. Los volúmenes de ambos lagos son $V_1 = 2\ Km^3$ y $V_2 = 1\ Km^3$. Al comienzo de la estación, el stock de peces en el lago 1 es de 30 000. a) Plantee el sistema de ecuaciones correspondiente. b) encuentre el número final de peces en cada lago asumiendo que no han habido pérdidas por pesca o muerte. (Nota: el valor de k es uno).

5. Determinar la naturaleza y propiedades de estabilidad del punto crítico (0,0) para cada uno de los siguientes sistemas autónomos lineales. Hallar la ecuación de las trayectorias, resolver esa ecuación y dibujar algunas de las trayectorias indicando la dirección de t creciente.

$$a)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y \end{cases} \quad b)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 5y \end{cases} \quad c)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases} \quad d)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad f)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{cases} \quad g)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

6. El modelo de crecimiento poblacional no acotado para una especie se describe con la ecuación: $y' = k\,y$, cuya solución es $y = C\,e^{kt}$. Para el caso de interacción entre dos especies, siendo $x(t)$ la población de la especie 1 en el tiempo t e $y(t)$ la población de la especie 2 en el tiempo t, será: $\begin{cases} x' = a\,x + by \\ y' = c\,x + d\,y \end{cases}$

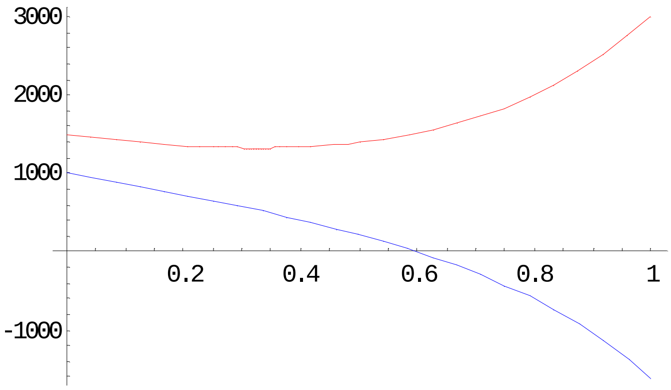
Si las especies <u>compiten</u> por un mismo recurso: b, c < 0 (el término b y c, representa el tipo de interacción). En una interacción <u>depredador-presa</u>, asumimos que el número de presas consumidas por unidad de tiempo varía directamente con el número de depredadores. Si la especie 1 consume exclusivamente especie 2, luego b>0 y c>0.

En una relación <u>simbiótica</u>, la presencia de la especie 2 puede incrementar la tasa de supervivencia de la especie 1. A su vez, un miembro de 2 puede proveer refugio a un miembro de 1, b > 0.

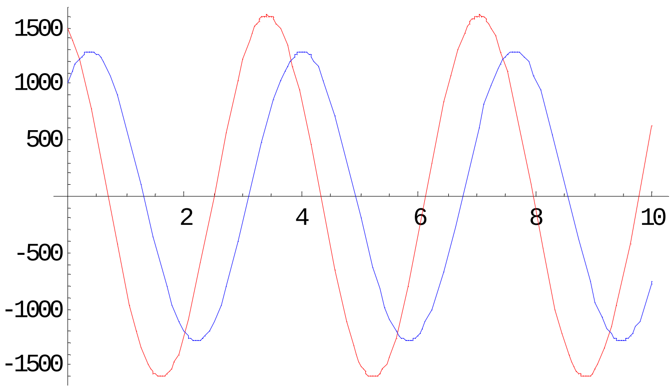
En los siguientes ejercicios determine: a) las soluciones x(t) e y(t); b) el tipo de relación entre las poblaciones y c) el comportamiento de las poblaciones a largo plazo.

a) $\begin{cases} x' = x - 2.5y \\ y' = -1.6x + y \\ x(0) = 1500 \\ y(0) = 1000. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x - 2.5\,y \\ y' = 1.6x - y \\ x(0) = 1500 \\ y(0) = 1000 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -x + 2\,y \\ y' = x - 2\,y \\ x(0) = 450 \\ y(0) = 150 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \\ x(0) = 500 \\ y(0) = 300 \end{cases}$

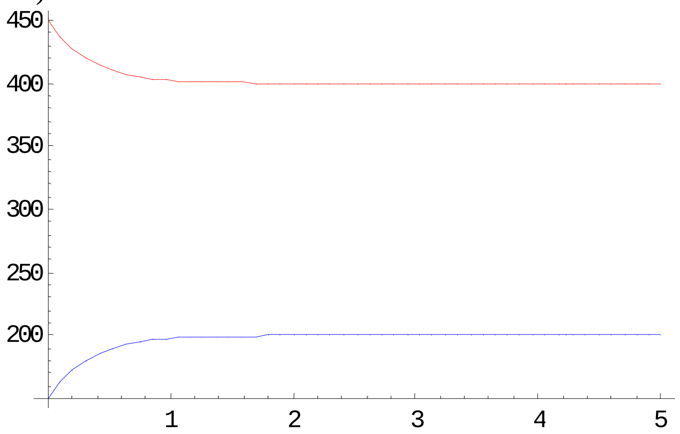
6-a)



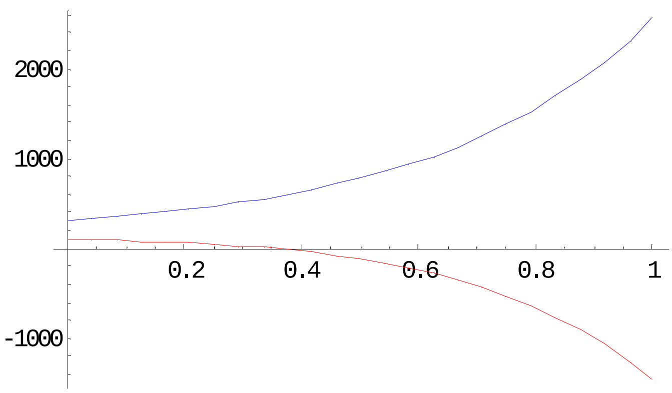
6-b)



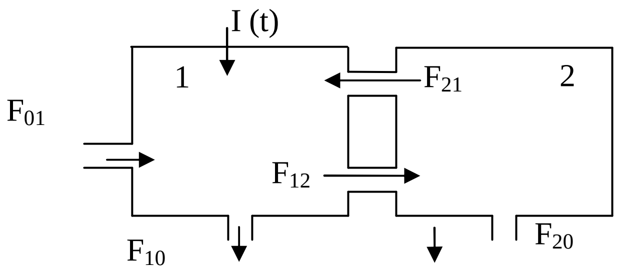
6-c)



6-d)



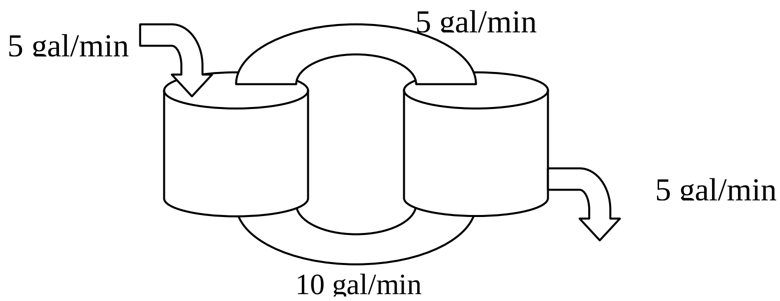
7. Dado el sistema



donde: F_{ij} = tasa de flujo del tanque i al tanque j [l /min];I (t) trazador agregado por unidad de tiempo [gr/min]; V_i volumen del tanque i [l]; x (t) cantidad de trazador en el tanque 1[gr]; y (t) cantidad de trazador en el tanque 2 [gr]; c_i concentración en el tanque i (c_1 = x(t) / V_1 ; c_2 = y(t) / V_2) [gr/l].
Las ecuaciones serán:

$$\begin{cases} x' = -(F_{12}+F_{10})\, c_1(t) + F_{21} c_2(t) + I(t) \\ y' = F_{12}\, c_1(t) - (F_{21}+F_{20}) c_2(t) \end{cases}$$

8. Sea un sistema de dos tanques como se muestra en la figura. Si se vierten 50 gr de pintura en el tanque 1, plantee las ecuaciones para x (t) e y (t), cantidades de pintura en cada uno de los tanques al tiempo t. Si la concentración de pintura es de 1 gr/gal en el flujo del tanque 1 y consideramos x (0) = y (0) = 0, encuentre y grafique las soluciones.



9. En cada uno de los problemas propuestos resuelva el sistema de ecuaciones correspondiente por eliminación

$$a)\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 - e^{-t}\,sent \\ x_2' = 4x_1 - x_2 + 2e^{-t}\cos t \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 - sen2t & x_1(0) = 0 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + t & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

10. En cada uno de los problemas siguientes resuelva el sistema de ecuaciones dado, comprobando en cada caso que aparece el número apropiado de constantes en la solución general.

$$a)\begin{cases} (D^2-3D+2)x_1 + (D-1)x_2 = 0 \\ (D-2)x_1 + (D+1)x_2 = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} (D^2-4D+4)x_1 + 3Dx_2 = 1 \\ (D-2)x_1 + (D+2)x_2 = 0 \end{cases}$$

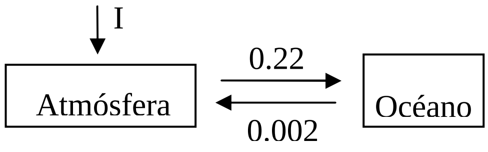
$$c)\begin{cases} (2D-1)x_1 + Dx_2 = t \\ (D-1)x_1 + Dx_2 = 2 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} (D^2-4D+4)x_1 + (D^2+2D)x_2 = 0 \\ (D^2-2D)x_1 + (D^2+4D+4)x_2 = 0 \end{cases}$$

12. La quema de combustibles fósiles por la industria adiciona dióxido de carbono desde la tierra hacia la atmósfera a una tasa de aproximadamente $6x10^9$ to /año. Este exceso de carbono debe ser absorbido por el océano para evitar

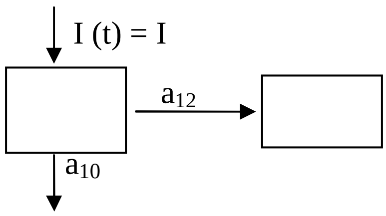
acumulaciones a largo plazo. En la figura se muestra un modelo simple de dos compartimentos para el ciclo del dióxido de carbono. Bolin* planteo el siguiente problema de valores iniciales, estimando las condiciones iniciales x (0) = 7 x 10^9 to e y (0) = 35000 x 10^9 to.

$$\begin{cases} x' = -0.2\,x + 0.0025y + I \\ y' = 0.2x - 0.0025y \end{cases}$$

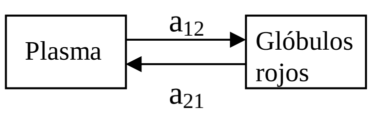
a) si I = 0, encontrar las soluciones x(t) e y(t). Determine el comportamiento a largo plazo de las soluciones y analizar la estabilidad del sistema.
b) idem al punto a si I = 6x10^9 to /año.



13. Plantear las ecuaciones que describen el siguiente sistema.

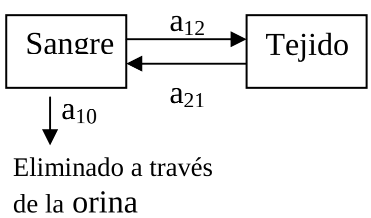


14. En el flujo sanguíneo, los iones potasio se transportan desde el plasma hacia los glóbulos rojos y viceversa. Este comportamiento sugiere un sistema simplificado como el que se muestra en la figura



Si se inyecta una cantidad fija de potasio radioactivo (K^{42}) en el flujo sanguíneo, y no existen pérdidas en el sistema: Plantee las ecuaciones correspondientes y determine el funcionamiento a largo plazo de las mismas. Desde la muestra, se ajustó la ecuación $\dfrac{x(t)}{x_0} = 0.06 + 0.94\,e^{-0.3\,t}$ a los datos obtenidos, encuentre a_{12} y a $_{21}$.

15. La Creatina (fosfato de creatina) es una componente de la orina que es utilizada para suplir energía a los músculos. Cuando una dosis de Creatina se inyecta en el flujo sanguíneo, subsecuentes muestras de sangre muestran que la concentración puede representarse por una función de la forma: $c_1 e^{-r_1 t} + c_2 e^{-r_2 t}$.
Esto sugiere el uso de un modelo de dos compartimentos como se muestra en la figura:



Plantee el correspondiente sistema de ecuaciones. Muestre que $x'' + (a_{12} + a_{21} + a_{10})x' + a_{10}a_{21}x = 0$ y que ambas raíces de la ecuación característica son negativas. Encuentre las soluciones *x (t)* e *y (t).*

16. Para cada sistema no lineal hallar sus puntos críticos y resolver la ecuación de la trayectoria asociada

$$a)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(x^2-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=2xy^2\end{cases}\qquad b)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(x^2-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x(x^2-1)\end{cases}\qquad c)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x\\ \dfrac{dy}{dt}=2x^2y^2\end{cases}$$

17. Hallar el punto crítico del sistema, llevar mediante cambio de variables el punto crítico al origen y analizar su estabilidad.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-2y+10\\ \dfrac{dy}{dt}=11x-8y+49\end{cases}$$

18. La ecuación $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2b\dfrac{dx}{dt}+a^2x=0$ permite estudiar las vibraciones libres de una masa sujeta a un muelle.

a) Convertir la ecuación de orden 2 en un sistema de dos ecuaciones de orden 1.
b) En los cuatro casos siguientes, describir la naturaleza y las propiedades de estabilidad del punto crítico y dar una breve interpretación del movimiento correspondiente de la masa.
i) b=0 ii) 0<b<a iii) b=a iv) b>a

19. Encontrar el punto crítico de un modelo presa predador de Volterra, analizar su estabilidad y encontrar su trayectoria.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-by)\\ \dfrac{dy}{dt}=-y(c-dx)\end{cases}$$

20. El lago Erie tiene un volumen de 480 km3. Los flujos de entrada, proveniente del lago Hurón y de salida hacia el lago Ontario son de 350 km3/año. Suponga que en el instante t = 0 (años) la concentración de contaminación del lago Erie es cinco veces la del lago Hurón. a) plantee y resuelva la ecuación diferencial que modela la contaminación en el lago Erie. b) ¿Cuánto tiempo le tomara reducir la concentración de contaminación en el lago Erie al doble de la del lago Hurón?