I - ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES, INTERPRETACIÓN GRÁFICA Y ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN I.

Introducción

Supongamos que se pretende escribir matemáticamente, a través de una ecuación que las represente, las siguientes situaciones:

1. El número de habitantes se duplica cada 5 anos, encontrar la razón de cambio: $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{5} p$
2. La fuerza para mover un objeto directamente proporcional a su aceleración encontrar la razón de cambio: $f = ka$ y $\frac{df}{da} = k$.

Ambas situaciones fueron descriptas a través de una ecuación diferencial.

Desde los primeros pasos en el cálculo diferencial dada una función $y = f(x)$, su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, es también una función que se puede encontrar mediante ciertas reglas. Por ejemplo, si $y = e^{-x^3}$ entonces $\frac{dy}{dx} = -3x^2 e^{-x^3}$ o equivalentemente $\frac{dy}{dx} = -3x^2 y$. El problema consiste en, dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = -3x^2 y$, hallar de alguna manera una función $y = f(x)$, que satisfaga dicha ecuación. En una palabra, se desea resolver ecuaciones diferenciales. La forma más sencilla de una ecuación diferencial es $\frac{dy}{dx} = f(x)$, resolverla consiste en encontrar una función cuya derivada sea $f(x)$, por lo tanto, podemos decir que los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales constituyen una generalización del cálculo de primitivas. Entonces,

¿Qué es una Ecuación Diferencial?

Se llama ecuación diferencial (E.D) a una ecuación que relaciona una función incógnita $y = y(x)$ (o variable dependiente), y sus derivadas $y´, y´´,...,y^{(n)}$. es decir, una ecuación de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'',...., y^{(n)}\right) \qquad (1)$$

¿Cómo se Clasifican Las Ecuaciones Diferenciales?

1. Tipo

Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria** (E. D. O.); y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se denomina **ecuación en derivadas parciales** (E. D. P.).

2. Orden

El orden de una ecuación diferencial ordinaria, es igual al de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación.

3. Grado

Es la potencia a la que esta elevada la derivada mas alta, siempre y cuando la ecuación diferencial este dada en forma polinomial.

Existe otra clasificación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias la cual se basa en si éstas son lineales o no lineales:

Definición: Se dice que una ecuación diferencial $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$ es lineal de orden n en las variables $y, y', y^{(n)}$. si tiene la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = g(x) \qquad (2)$$

y se llama lineal homogénea si $g(x) = 0$.

Dada una ecuación diferencial lineal, su correspondiente ecuación lineal homogénea se denomina lineal homogénea asociada. Una ecuación que no es lineal se dice no lineal.

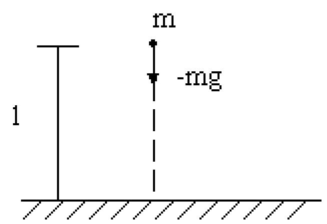
Definición: Decimos que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma implícita cuando tiene la forma $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, siendo F una función $F : \Omega \subseteq R^{n+2} \to R$ con Ω un subconjunto abierto. Y decimos que está expresada en forma explícita cuando tenemos $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, con $f : D \subseteq R^{n+1} \to R$, con D un subconjunto (generalmente abierto).

Origen de las Ecuaciones Diferenciales (Modelos)

En el estudio de las ciencias e ingeniería, así como en otros campos tales como, la economía, medicina, psicología, investigación de operaciones entre otros, se desarrollan modelos matemáticos para ayudar a comprender la fenomenología o el origen de ciertos problemas físicos, biológicos, sociales, etc. Estos modelos a menudo dan lugar a una **ecuación diferencial.**
Cualquier tentativa de diseño de un sistema debe empezar a partir de una observación de su funcionamiento. Esta observación se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema. A esta descripción se le llama modelo matemático. Para los sistemas físicos, la mayoría de los modelos matemáticos que resultan útiles se describen en términos de ecuaciones diferenciales antes de que el sistema pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente.

Un ejemplo simple: *Caída Libre de un Cuerpo:*

En este ejemplo se puede aplicar la segunda Ley de Newton, la cual establece que la masa del objeto multiplicada por su aceleración es igual a la fuerza total que actúa sobre él.



Esto nos conduce a la ecuación diferencial siguiente:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad (3)$$

donde "*m*" es la masa del objeto, la función incógnita o función desconocida "*y*" es su altura sobre el suelo, "*g*" la constante de gravedad, y "*–mg*" la fuerza debida a la gravedad. Cancelando "*m*" en ambos miembros de (3), esta ecuación diferencial toma la forma, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ o equivalentemente $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g$.

En este caso, por integración inmediata es fácil despejar a "y", en la ecuación anterior, esto es $d\int\left(\frac{dy}{dt}\right)=-g\int dt$, por lo tanto,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(y)=v(t)=-gt+C_1, \qquad (4)$$

que representa la velocidad del objeto en cualquier instante de tiempo t. Repitiendo el mismo procedimiento, en la ecuación (4), $\int d(y)=\int(-gt+C_1)dt$, luego se obtiene la solución de la ecuación (3)

$$y(t)=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2, \qquad (5)$$

las constantes de integración C_1 y C_2, se pueden determinar si se conoce su altura y la velocidad inicial del objeto. Así pues, se tiene por un lado, que la función dada en (5) representa una fórmula para determinar la altura del objeto en cualquier instante de tiempo t, y por otro, una solución a al ecuación diferencial (3), ya que al sustituir (5) y sus derivadas hasta segundo orden en (3), esta última se reduce a una identidad.

Conclusiones

- *La ecuación (3), representa una ecuación diferencial lineal de 2º orden con función desconocida* $y(t)$.
- *La ecuación diferencial (3), describe el movimiento de un cuerpo en caída libre, pues a partir de esta, podemos determinar su velocidad y altura en cualquier instante de tiempo t.*
- *La función obtenida en (5), satisface a la ecuación diferencial (3). La pregunta es ¿La solución es única?*
- *¿Toda ecuación diferencial ordinaria tiene solución?*

Existencia y unicidad

Para analizar existencia y unicidad nos concentraremos en ecuaciones diferenciales de primer orden lineales de la forma:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (6)$$

Un modelo matemático de una problemática puntual, constituye **un problema a valores iniciales**, que consiste en una ecuación de la forma (6) junto con una condición inicial $y(x_0)=y_0$. Resolver un problema a valores iniciales:

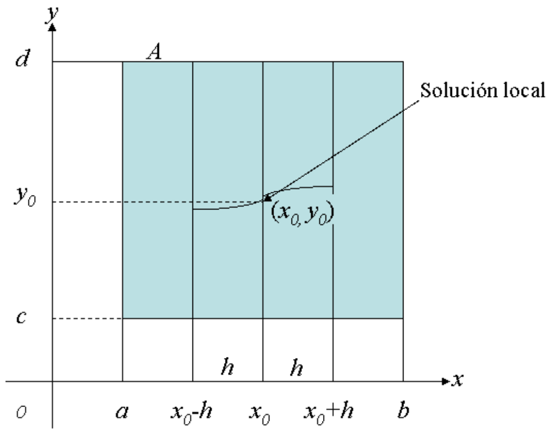
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (7)$$

implica encontrar una función $y(x)$ que satisfaga simultáneamente ambas condiciones del sistema (7). La función $f(x,y)$ es continua en sus dos variables y está definida en un cierto dominio A del plano, entendiendo por tal, cualquier conjunto abierto y conexo. Una solución de (7) en un intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$ que contenga a x_0, es una función diferenciable, $y = y(x)$ definida en $I = (x_1, x_2)$, y satisface las condiciones:

i) $(x, y(x)) \in A \Rightarrow f(x, y(x))$ está definida.

ii) $y'(x) = f(x, y(x))$ y además $y(x_0) = y_0$

Geométricamente, esto significa buscar la **curva integral** que pasa por el punto (x_0, y_0) del plano XY (en la región rectangular A), cuya tangente en dicho punto esta definida por $f(x_0, y(x_0))$



Para poder responder las preguntas que nos hicimos en el modelo de caída libre, debemos establecer resultados de **existencia y unicidad de soluciones**:

Definición- solución ε aproximada- *Sea $f(x,y)$ continua en cierto dominio D y sea $I = (x_1, x_2)$, un intervalo de R. Entonces la función $y(x)$ de finida sobre I es una solución de $y' = f(x,y)$ con error $\varepsilon \in R^+$ si:*

i) $(x, y(x)) \in D \Rightarrow f(x, y(x))$ está definida.

ii) $y(x)$ es continua en I

ii) $y(x)$ *tiene derivada continua a trozos en I (con lo que sólo puede no estar definida solamente en un número finito de puntos, que denotamos por* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$*)*

iv) $|y'(x) - f(x, y(x))| < \varepsilon \ \forall t \in I,\ t \neq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$

La última definición representa un concepto de doble interés, pues resulta útil en la práctica porque permite obtener aproximaciones tan precisas como se quiera y porque será el eje central para demostrar existencia y unicidad.

Analizaremos la construcción a través de la siguiente proposición:

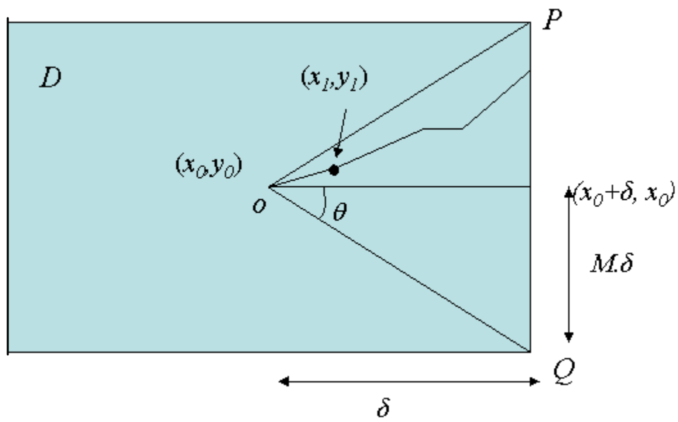
Proposición: *Sea* $(x_0, y_0) \in S$, *con S alguna región; tal que los puntos del rectángulo* $A = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ *pertenezcan a S.*

Sea $|f(x, y)| \leq M$ para $(x, y) \in A$. *Entonces si* $\delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ *se puede construir una solución aproximada* $y' = f(x, y)$ *en el intervalo* $|x - x_0| \leq \delta$ *tal que* $y(x_0) = y_0$ *y cuyo error* ε *sea un número arbitrariamente pequeño.*

Observación: La elección de δ, es natural en el sentido de que partimos de las desigualdades: $|x - x_0| \leq a$; $|y - y_0| \leq b$ y pedimos que $|x - x_0| \leq \delta$, entonces δ debe ser menor o a lo sumo igual a *a*. Por otra parte $|f(x, y)| \leq M$, eso es equivalente a decir $|y'(x)| \leq M \Rightarrow |y(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$ y no puede exceder a *b*. (Derrick, W.& Grossman, Hartman, P.)

Dada la definición del rectángulo A, el rectángulo

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq \delta,\ |y - y_0| \leq M\delta\} \subset A$$



Dado un $\varepsilon > 0$ real y puesto que f es continua en D entonces $\exists \alpha > 0$ tq $|f(\hat{x}, \hat{y}) - f(x, y)| < \varepsilon$ para $(\hat{x}, \hat{y}), (x, y) \in D$ y $|\hat{x} - x| < \alpha$ y $|\hat{y} - y| < \alpha$.

Sea $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$cualquier conjunto de puntos tal que:

$$\left.\begin{array}{l} i)\ x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = x_0 + \delta \\ ii)\ x_i - x_{i-1} < \min\left\{\alpha, \dfrac{\alpha}{M}\right\} \quad i = 1, ..., n \end{array}\right\}$$

con estos datos construiremos una solución aproximada ene el intervalo $x_0 < x < x_0 + \delta$, **la solución aproximada será una poligonal** construida de la siguiente manera:

A partir de (x_0, y_0) trazamos hacia la derecha un segmento con pendiente $f(x_0, y_0)$; ese segmento cortara a la recta $x = x_1$, en un punto (x_1, y_1) . A partir de ese punto trazamos hacia la derecha un segmento con pendiente $f(x_1, y_1)$; que cortara la recta $x = x_2$, en el punto (x_2, y_2) y así sucesivamente.

El punto (x_1, y_1) debe estar en el triangulo OPQ de la figura, puesto que la $tg\theta = M$ y $|f(x, y)| \le M$.

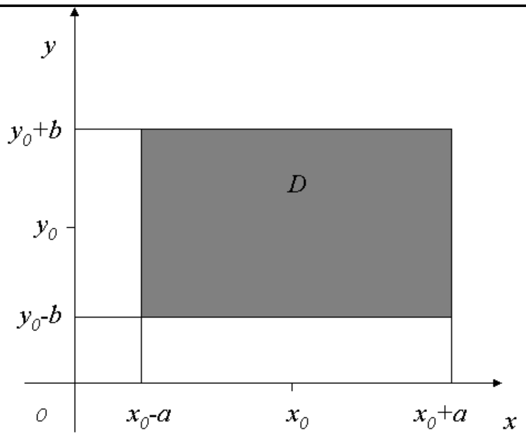
Por la misma razón (x_2, y_2) debe estar en el triangulo mencionado y así con el resto de los puntos. Este proceso permite continuar hasta $(x_0 + \delta)$. Se desarrollará la prueba analítica de esta construcción en el teorema 3.

Teorema: *Sea $f(x, y)$ continua para todos los valores x e y. Entonces el problema de valor inicial (7) es equivalente a la ecuación integral:*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(t))\, dt \qquad (11)$$

en el sentido de que y(x) es una solución de la ecuación (7) si y solo si y(x) es solución de (11).

Teorema 2- Teorema de Existencia- Picard Lindelöf *- Sea* $f(x,y)$ *continua Lipschitz en y con una constante Lipschitz k, sobre una región D de todos los puntos que satisfacen las desigualdades* $|x - x_0| \le a$; $|y - y_0| \le b$. *Entonces existe un número* $\delta > 0$ *tal que el problema a valores iniciales tiene una solución y(x) sobre el intervalo* $|x - x_0| \le \delta$.



$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$

Aproximación gráfica de la solución

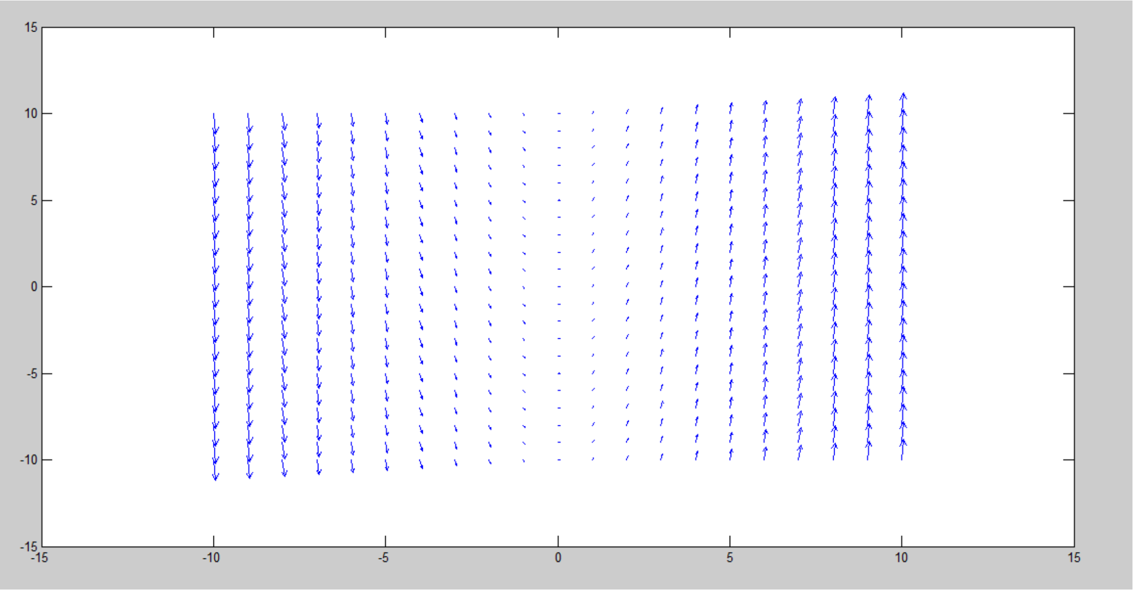
Hasta ahora hemos visto cómo obtener la solución para una ecuación diferencial lineal de primer orden que cumple con un formato específico, sin embargo, éste no es el único método existente para resolverlas. **Ninguna técnica es lo suficientemente general como para asegurar que toda ecuación diferencial admite solución**. Analicemos el problema desde un punto de vista geométrico:

Sea $y' = f(x,y)$ una ecuación diferencial de primer orden, donde el segundo miembro es una función continua en una región R del plano XY.

Si y(x) es una solución de la ecuación diferencial que mencionamos en un intervalo I, para cada valor xo $\in I$ $y'(x_o) = f(x_o, y(x_o))$ es la pendiente de la curva solución n el punto xo. Es decir, $y = y(x)$ es una solución de $y' = f(x,y)$ sii la recta pendiente $f(x_o, y(x_o))$ es tangente a la gráfica de $y(x)$ para todo $x_o \in I$. Supongamos que en cada (x_o, y_o) de R dibujamos un segmento rectilíneo con pendiente $f(x_o, y_o)$; el conjunto resultante de segmentos rectilíneo se llama **campo direccional**. De este modo las curvas solución de la ecuación pueden describirse como curvas diferenciales en R cuya dirección en cada punto coincide con la dirección del segmento rectilíneo. Cada curva solución se denomina **curva integral.** En otras palabras, l*as curvas solución son las trayectorias o* *líneas de flujo determinadas por el campo direccional de la ecuación, y las trayectorias forman el conjunto o familia de curvas integrales.*

Ejemplo:

$y' = 2x \rightarrow y = x^2 + c$



Las curvas solución de $y' = f(x, y) = 2x$ forman una familia uniparamétrica de parábolas, es decir, que depende sólo de un parámetro (el parámetro x).

En resumen, dada la forma (no necesariamente lineal) de f, el problema consiste en encontrar una solución particular de una ecuación diferencial dada, cuya curva solución pase por el punto $(x_0, y_0) \in R$ (**problema del valor inicial**), para esto es necesario determinar de que manera podemos utilizar la información que nos entrega la ecuación diferencial sin tener que recurrir a los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, utilizando herramientas de cálculo básico para entender el comportamiento de la ecuación objetivo $y(x)$:

Retomando el ejemplo $y' = 2x$ ¿Qué información es posible obtener?

Lo primero que podemos analizar son los extremos de la función objetivo, que concuerdan exactamente con aquellos puntos donde $y' = f(x, y) = 0$, con lo cual se cuenta con un extremo en x=0 (recordar que los extremos pueden ser máximos locales, mínimos locales, o puntos de inflexión).

La derivada de una función también nos indica si una función crece o decrece en una vecindad del punto x_0, esto es posible verlo mediante el Teorema del valor medio de Lagrange que dice que si $y(x)$ (la función objetivo) es una función continua en un intervalo [a,b] y diferenciable (derivable en el caso de una función que depende sólo de x) en (a,b) entonces existe c tal que:

$$\frac{y(b)-y(a)}{b-a}=y'(c)$$

Si consideramos a y b cercanos entre sí y suponiendo que a<b y la función es creciente, es decir, y(a)<y(b) vemos que el signo de la derivada es positivo, por lo tanto, si la derivada crece, la función también lo hace. Por lo tanto, el signo de la derivada nos sirve para saber en qué regiones, la función objetivo, $y(x)$, crece y decrece.

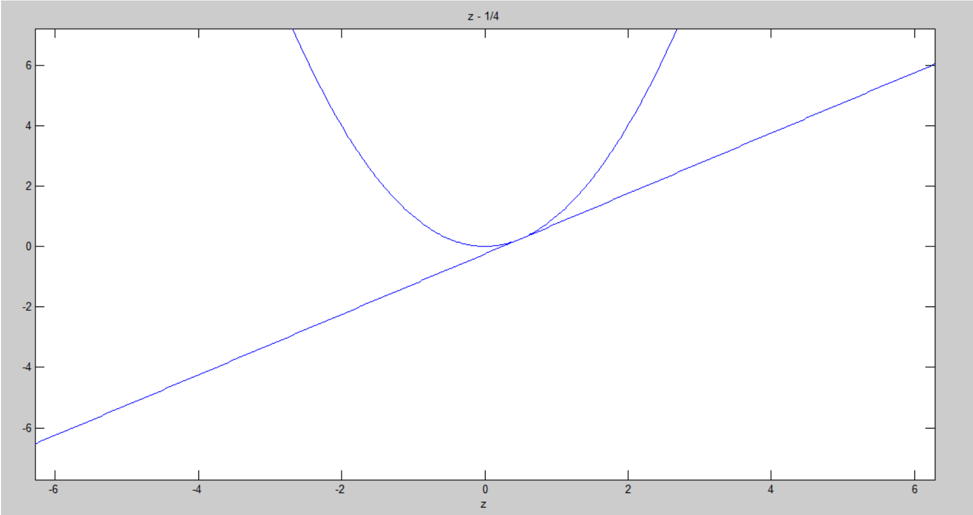
Continuando con el ejemplo, la función objetivo crece cuando x>0 y decrece cuando x<0, (x=0 extremo).

Luego, también podemos determinar la existencia de simetrías a partir de la derivada, por ejemplo, sabemos que una función es par cuando $f(x)=f(-x)$ ó impar cuando $f(-x)=-f(x)$ y que son simetrías respecto a los ejes x=0 en el caso de una función par, y al origen para las funciones impares. Sin embargo se puede probar que la derivada de una función par es impar, y viceversa, por lo tanto, podemos decir, sin temor a equivocarnos, que en nuestro ejemplo, la función objetivo es par.

Podemos obtener un poco más de información si derivamos la ecuación diferencial, pues ésta nos da información sobre la concavidad de la función objetivo:

¿Concavidad?

Supongamos que tenemos una función f, continua y diferenciable dos veces. Consideramos una porción muy pequeña de la curva, el signo de la derivada segunda indica si la curva pasa “por arriba” o “por debajo” de la recta tangente a ese punto, en la figura, vemos un ejemplo de concavidad hacia arriba, es decir, que la curva pasa “por arriba” de la recta tangente a ese punto. En nuestro ejemplo podemos ver que el signo de la derivada es siempre positivo, por lo tanto la concavidad es hacia arriba:



Por último, podemos determinar la presencia de singularidades, es decir, puntos no definidos en la derivada. En nuestro ejemplo no hay singularidades.

Si tenemos $y' = f(x,y) = \frac{1}{x}$, como f representa la pendiente de la recta tangente en x, qué ocurre con esta función en el punto x=0, lo primero que nos sugiere es que la pendiente en ese punto es infinito, esto no nos dice mucho, sin embargo, considerando el límite cuando x tiende a cero se puede ver que *f* crece sin límite, mostrando que la singularidad de *f* también es una singularidad de y, con este mismo análisis podemos ver que el tipo de singularidad es una discontinuidad de primera especie.

Finalmente, queda el método de las isoclinas, que consiste en encontrar los puntos del plano por lo que pasa una solución con pendiente constante $f(x,y) = \alpha$

Definición:

Una isoclina correspondiente a una constante de una ecuación diferencial, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ son los puntos que satisfacen $f(x,y) = m$

Volviendo a nuestro ejemplo:

$\frac{dy}{dx} = 2x = m$, entonces $x = \frac{m}{2}$, dado el punto x en el eje, el valor de tangente que obtenemos para todo valor de y.

Veamos un ejemplo en el cuál las isoclinas dependen tanto de x como de y, $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 = m$, para cada punto ($x$,$y$) podemos determinar las isoclinas, que son, de hecho, circunferencias de radio $\sqrt{m}$

Es decir, a cada punto del plano *x*, *y* podemos asociarle un segmento de pendiente *f*(*x*, *y*). De esta manera obtendremos un campo de direcciones en la región en la cuál esté definida *f*. Se denominan entonces, isoclinas a las curvas que unen los puntos en los que la pendiente es constante.

No siempre es sencillo dibujar las isoclinas y por tanto las soluciones. Los siguientes ejemplos muestran cuales son los pasos más adecuados para llevarlo a cabo, aunque cada situación puede necesitar un estudio particular. a) $y' = y - x$ es una ecuación lineal. Las isoclinas son muy sencillas en este caso: $y - x = m$ son rectas de pendiente 1 y ordenada en el origen m, es decir la pendiente de las soluciones que pasan por ellas.

Ecuaciones Diferenciales lineales de orden uno

Sea $y' = f(x,y)$, donde *f* es una función dada en dos variables, suponemos ahora que la función *f* depende linealmente de la función desconocida o variable independiente y de su derivada. (y e y') y que podría escribirse en la siguiente forma, $P(x)y' + Q(x)y = G(x)$,donde G(x) puede ser o no cero. La expresión es equivalente a $y' + p(x)y = g(x)$; con $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ y $g(x) = \dfrac{G(x)}{P(x)}$ ambas continuas e integrables en un intervalo *I* de *R*, buscaremos entonces todas las posibles soluciones de la ecuación planteada.

En primer lugar comenzaremos por el caso más simple considerando la ecuación homogénea (g(x)=0): $y' + p(x)y = 0$ de la cual podemos obtener una solución usando pasos directos de integración:

$\displaystyle\int \frac{y'}{y} = \int - p(x)\ dx$ luego $\ln y(x) = \displaystyle\int - p(x)\ dx + C$ en $I \subseteq R$ o equivalentemente,

$$\ln y(x) = e^{\int - p(x)\ dx + C}$$

El cálculo anterior fue sencillo porque fue posible separar variables en el proceso de integración.

Volviendo al caso general, ecuación diferencial lineal de orden uno inhomogénea , $y' + p(x)y = g(x)$; claramente en este caso no se pueden separar las variables.

Utilizaremos entonces una función auxiliar que denominaremos factor integrante $\mu(x)$ con el objetivo de lograr transformar el primer miembro de la ecuación en una derivada de una función, transformando de este modo la ecuación a un formato directamente integrable. Multiplicando miembro a miembro por $\mu(x)$,

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x)$$

Si sumamos y restamos el término $\mu'(x)y$ y pedimos que $\mu(x)$ satisfaga la ecuación $\mu(x)' - \mu(x)p(x) = 0$, se obtiene la siguiente igualdad $(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x)$. Integrando miembro a miembro se obtiene la solución general $y(x) = \mu^{-1}(x)\int \mu(x)g(x)\ dx + C\ \mu^{-1}(x)$.

Luego, si se plantean condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ se obtendrá una solución particular de la ecuación.

Ejemplo:

Hallar todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$xy' + (1 - x)y = e^{2x}$ en $I = (0, \infty)$

En primer lugar lo llevamos a la forma canónica $y' + p(x)y = g(x)$ con $p(x) = \dfrac{1-x}{x}$ y $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$;

$p(x)$ y $g(x)$ tiene problemas sólo en el 0, pero el intervalo $I = (0, \infty)$ no lo contiene, entonces en *I* son continuas.

Luego el factor integrante está dado por $\mu(x) = e^{\int \left(1-x/_x\right)dx} = x.e^{-x}$

La solución general está dada por $y(x) = \dfrac{e^x}{x}\displaystyle\int x\ e^{-x}\ e^{2x}\ dx + C\ \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{e^{2x} + c\,e^x}{x}$.