II- RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Muchas ecuaciones diferenciales carecen de solución analítica debido a la naturaleza de las mismas. Sin embargo, muchas de ellas modelan problemas físicos y/o biológicos que requieren su resolución. Para afrontar este problema se recurre a los métodos numéricos que nos brindan de forma aproximada una solución de la ecuación diferencial ordinaria. Para lo cual es necesario, al menos, conocer el valor de la curva solución en un punto.

Estos métodos, en lugar de dar una formulación para $y(t)$ producen una serie de pares ordenados $\left(t_n, y(t_n)\right)$ donde la primer componente se corresponde con el valor de la variable independiente (t_n) y la segunda es una aproximación de la solución en el punto t_n. La serie de puntos que se obtiene comienza con el punto $\left(t_0, y(t_0)\right)$ que es la condición inicial del problema a resolver. Los demás $t_n \in [a,b]$, intervalo en el cual se desea aproximar la solución, y los valores de $y(t_n)$ se obtienen de aplicar el método numérico.

Estudiaremos diferentes métodos todos de paso simple, es decir, métodos que permiten calcular el valor aproximado de $y(t_{n+1})$ sólo utilizando el valor aproximado obtenido para $y(t_n)$.

<u>Ejemplo:</u>

La ley de enfriamiento de Newton modela la variación de la temperatura de un objeto. Dicha variación, o tasa de cambio de la temperatura, es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la del ambiente exterior al cual se somete el mismo.

Consideremos $y(t)$ la temperatura del objeto en el instante t y A la temperatura del medio en que se encuentra, luego:

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - A)$$

donde k es una constante positiva, y el signo negativo indica que la temperatura decrece

Si conocemos la temperatura del objeto en t_0 y la llamamos y_0, podemos calcular la solución analítica a través de la técnica de separación de variables, obteniendo:

$$y(t) = A + (y_0 - A)e^{-kt}$$

Cada elección y_0 nos da una solución distinta. Varias soluciones del problema se muestran en la Fig. 2.1. En la gráfica se observa que, cuando t crece, la temperatura del cuerpo se aproxima a la temperatura ambiente. Además, si $y_0 < A$ el cuerpo se calienta mientras que si $y_0 > A$ el cuerpo se enfría.

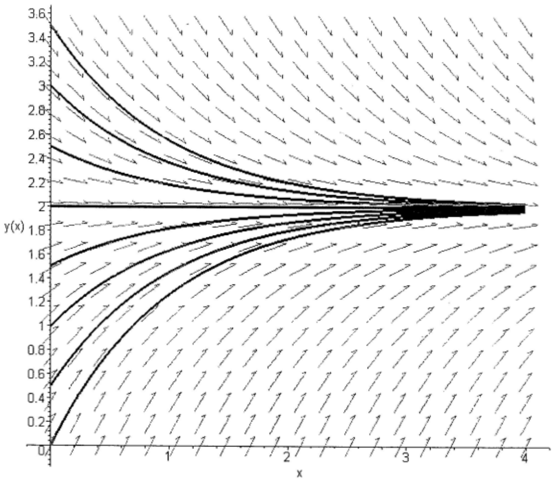


Fig. 2.1: Campo tangente de la ley de enfriamiento de Newton.

A continuación desarrollaremos una serie de métodos numéricos que utilizaremos para aproximar la solución de este problema.

METODO DE EULER

Sea [a, b] el intervalo en el que queremos hallar la solución de un problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Construimos un conjunto finito de puntos $\{(t_k, y_k)\}$ que son aproximaciones de la solución $y(t_k) \approx y_k$.

Problema: Construir los puntos (t_k, y_k) que verifican la ecuación diferencial.

Dividimos el intervalo [a, b] en N subintervalos (de igual tamaño, h). Luego los puntos que determinan los extremos de los subintervalos estarán dados por:

$$t_k = a + k.h \quad k = 0,1,\dots,N \quad h = (b-a)/N$$

El valor de incremento, h, se llama tamaño del paso.

Resolución aproximada:

Sea $y' = f(t, y(t))$ en $[t_0, t_M]$ con $y(t_0) = y_0$

Suponiendo que $y(t), y'(t), y''(t)$ son continuas y usando el Teorema de Taylor para desarrollar $y(t)$ alrededor del punto $t = t_0$, para cada punto t existe un punto c_1 entre t_0 y t tal que:

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)\, y'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \quad y''(c_1)$$

Al sustituir $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$, $h = t - t_0$ obtenemos una expresión para $y(t_1)$:

$$y(t_1) = y(t_0) + h\ f((t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2!} \quad y''(c_1)$$

Si el tamaño del paso es suficientemente pequeño, se puede considerar que h^2 es despreciable y

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + h\ f(t_0, y_0)$$

Al repetir este procedimiento, generamos una sucesión de puntos que se aproximan a la gráfica de la solución $y = y(t)$.

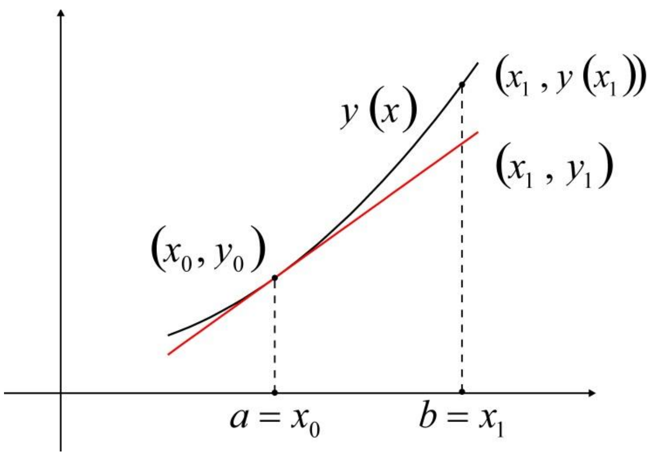
Término general del método de Euler:

$$y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\ f(t_k, y_k)$$

donde:

$$t_{k+1} = t_k + h \quad k = 0,1, \dots, N \text{ y } h = (b-a)/N.$$

Interpretación geométrica:



Algoritmo del Método de Euler

Dado un intervalo $[a, b]$ y $h = (b-a)/N$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Hacer para } \quad n = 0,1,\dots, N-1 \\ \qquad x_n = a + nh \\ \qquad y_{n+1} = y_n + h\ f(x_n, y_n) \end{array}\right.$$

El valor y_N será el valor aproximado para $y(b)$.

Ejemplo1:

Dado el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ aproximar el valor de $y(1)$.

En este problema $f(x,y) = y$, $[a,b] = [0,1]$ e $y_0 = 1$.

Tomemos $N = 2$, entonces $h = 0.5$. Calculamos:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h\ f(x_0, y_0) = 1 + 0.5 * 1 = 1.5 \\ y_2 &= y_1 + h\ f(x_1, y_1) = 1.5 + 0.5 * 1.5 = 2.25 \end{aligned}$$

o sea $y(1) \cong 2.25$.

Al aplicar el algoritmo en este ejemplo tenemos:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h\ f(x_0, y_0) = y_0 + h\ y_0 = y_0(1+h) = (1+h) \\ y_2 &= y_1 + h\ f(x_1, y_1) = y_1 + h\ y_1 = y_1(1+h) = (1+h)^2 \end{aligned}$$

Luego: $y_n = (1+h)^n$.

Cuando $N = 10$, se tiene $h = 0.1$ y se obtiene:

$$y(1) \cong y_{10} = (1+h)^{10} = (1.1)^{10} = 2.5937$$

Si $N = 100$, resulta que $h = 0.01$ y se obtiene:

$$y(1) \cong y_{100} = (1+0.01)^{100} = 2.70481.$$

Resumiendo los resultados obtenidos tenemos:

Tamaño del paso	Número de iteraciones M	$y_M \cong y(1)$
0.5	2	2.25
0.1	10	2.5937
0.01	100	2.70481

La solución exacta es $y(x) = e^x$, luego $y(1) = e = 2.718281828$.

Luego podemos calcular el error que se tiene al hacer la aproximación, este es:

$$e_k = |y(t_k) - y_k|$$

donde k representa el número de la última iteración.

Los errores que se tuvieron según el paso son:

Tamaño del paso	Error
0.5	0,4683
0,1	0,1246
0.01	0,0135

Ejemplo 2:

Comparar como el tamaño del paso afecta la aproximación se comparan las soluciones obtenidas con el método de Euler, con diferentes tamaños de paso para la ecuación de enfriamiento:

$$\frac{dy}{dt} = -2(y - 15)$$

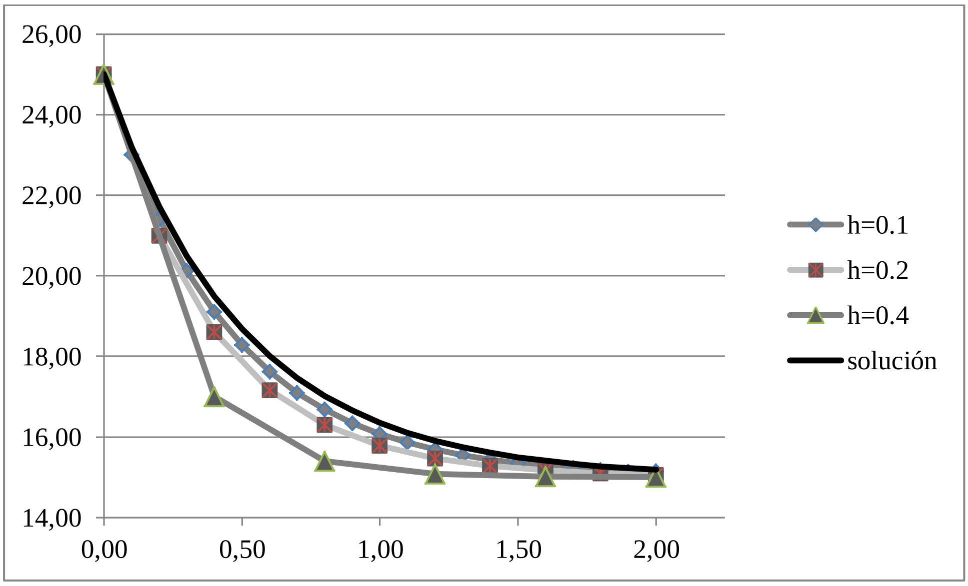
con condición inicial y(0) = 25 en el intervalo [0,2]

La tabla siguiente muestra aproximaciones de la solución para diferentes tamaños de paso.

x_n	y_n (h=0,1)	y_n (h=0,2)	y_n (h=0,4)
0,00	25,00	25,00	25,00
0,10	23,00		
0,20	21,40	21,00	
0,30	20,12		
0,40	19,10	18,60	17,00
0,50	18,28		
0,60	17,62	17,16	
0,70	17,10		
0,80	16,68	16,30	15,40
0,90	16,34		
1,00	16,07	15,78	
1,10	15,86		
1,20	15,69	15,47	15,08
1,30	15,55		
1,40	15,44	15,28	
1,50	15,35		
1,60	15,28	15,17	15,02
1,70	15,23		
1,80	15,18	15,10	
1,90	15,14		
2,00	15,15	15,06	15,00

La solución exacta de esta ecuación es: $y(t) = 10\, e^{-2t} + 15$ que evaluada en t=2 es 15,18316.

El siguiente gráfico muestra la solución de la ecuación de enfriamiento junto a las tres aproximaciones. Se puede observar como a medida que el tamaño del paso se reduce, es decir $h \to 0$, la solución aproximada se acerca a la solución.



METODO DE EULER MEJORADO

La fórmula de Euler se obtuvo reemplazando $f(t_k, y(t_k))$ por el valor aproximado $f(t_k, y_k)$:

$$y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\ f(t_k, y_k)$$

Para obtener una fórmula más precisa usamos el teorema fundamental del cálculo para obtener el punto (t_1, y_1), para la cual integramos $y'(t)$ en $[t_0, t_1]$ de manera que:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)\, dt = y(t_1) - y(t_0)$$

Luego:

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt$$

Usamos ahora un método de integración para aproximar la integral que aparece a la derecha de la expresión anterior. Usando la regla del trapecio con incremento $h = t_1 - t_0$, el resultado es:

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2}\left(f\big(t_0, y(t_0)\big) + f\big(t_1, y(t_1)\big)\right).$$

Este método, conocido como del trapecio, aproxima la integral mediante el promedio de los valores extremos.

Dado que $y(t_1)$, que es término que queremos aproximar, aparece en la expresión de la aproximación aplicaremos el método de Euler para aproximar la $y(t_1)$ que aparece en $f\big(t_1, y(t_1)\big)$, y así obtenemos:

$$y(t_1) \approx y_0 + \frac{h}{2}\,\big(f(t_0, y_0) + f(t_1,\, y_0 + hf(t_0, y_0))\big)$$

Repitiendo este procedimiento en cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, esto es, usando el método de Euler para aproximar el valor que queremos estimar y luego utilizando la regla del trapecio con el objeto de corregir la estimación, se obtiene y_{k+1} que es la aproximación de $y(t_{k+1})$.

Término general del método de Euler mejorado:

$$y(t_{k+1}) \approx y_k + \frac{h}{2}\,\big(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1},\, y_0 + hf(t_k, y_k))\big)$$

Algoritmo del Método de Euler Mejorado

Dado un intervalo $[a, b]$ y $h = (b-a)/N$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Hacer para } k = 0,1,\dots,N-1 \\ t_k = t_{k-1} + h \\ p_{k+1} = y_k + h\,f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,\big(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1},\, p_{k+1})\big) \end{array}\right.$$

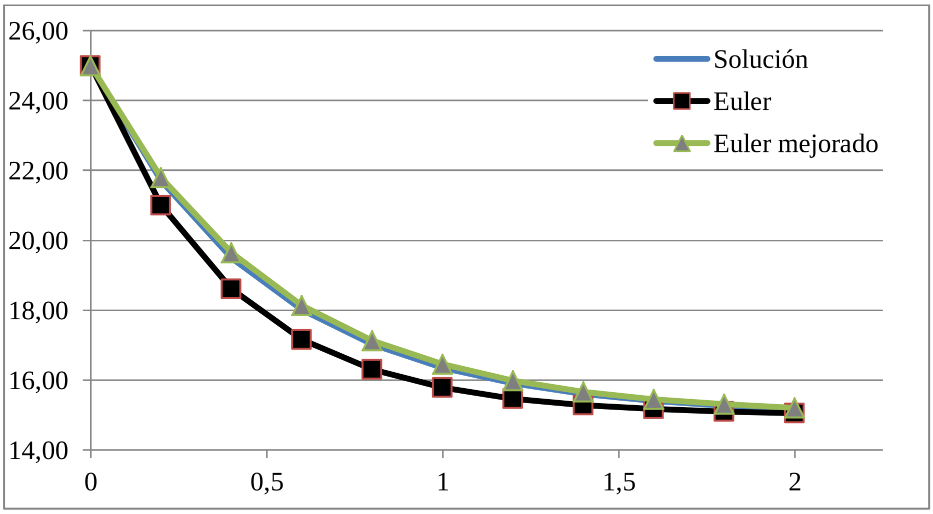
El valor y_N será el valor aproximado para $y(b)$.

Ejemplo: Resolver el problema de enfriamiento anteriormente planteado utilizando el método de Euler mejorado considerando h=0.2 y comparar con los resultados obtenidos con el método de Euler.

t_k	p_k	y_k
0		25
0,2	21,00	21,80
0,4	19.08	19,64
0,6	17,77	18,14
0,8	16,88	17,13
1	16,28	16,45
1,2	15,87	15,98

1,4	15,59	15,67
1,6	15,40	15,45
1,8	15,27	15,31
2	15,18	15,21

A partir del gráfico se puede visualizar que el error que se comete al aproximar la solución con el método de Euler mejorado es menor que al trabajar con el método de Euler. En este caso se comparan los resultados de las estimaciones utilizando h=0,2.



METODO DE RUNGE KUTTA ORDEN 4

Este método utiliza un promedio pesado de los valores de $f(t,y)$ trabajando con puntos intermedios dentro cada uno de los subintervalos en los cuales se dividió el intervalo donde se realiza la aproximación.

Dado un valor inicial y_0 se estima y_1 por:

$$y(t_1) \approx y_0 + \frac{h}{6}\left(k_{1_1} + 2k_{1_2} + 2k_{1_3} + k_{1_4}\right)$$

donde :

$$k_{1_1} = f(t_0, y_0)$$

$$k_{1_2} = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_{1_1}\right)$$

$$k_{1_3} = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_{1_2}\right)$$

$$k_{1_4} = f\left(t_0 + h, y_0 + hk_{1_3}\right)$$

Repitiendo la metodología en cada uno de los intervalos $[t_k, t_{k+1}]$ se obtiene la aproximación a la solución de la ecuación diferencial en el intervalo dado.

Término general del método de Runge Kutta es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_{n_1} + 2k_{n_2} + 2k_{n_3} + k_{n_4}\right)$$

donde: $$k_{n_1} = f(t_n, y_n)$$

$$k_{n_2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n_1}\right)$$

$$k_{n_3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n_2}\right)$$

$$k_{n_4} = f\left(t_n + h, y_n + hk_{n_3}\right)$$

Algoritmo del Runge Kutta

Dado un intervalo $[a, b]$ y $h = (b-a)/N$

Hacer para $n = 0,1,\dots,N-1$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$k_{n_1} = f(t_n, y_n)$$

$$k_{n_2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n_1}\right)$$

$$k_{n_3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n_2}\right)$$

$$k_{n_4} = f\left(t_n + h, y_n + hk_{n_3}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_{n_1} + 2k_{n_2} + 2k_{n_3} + k_{n_4}\right)$$

El valor y_N será el valor aproximado para $y(b)$.

Ejemplo: Resolver el problema de enfriamiento:

$$\frac{dy}{dt} = -2(y - 15)$$

con condición inicial y(0) = 25 en el intervalo [0,2] utilizando el método de Runge Kutta considerando h=0.2 y comparar con los resultados obtenidos utilizando los otros métodos.

En la siguiente tabla se muestra el resultado de la estimación y el valor de la solución en los puntos donde la solución fue estimada. Se puede observar que al trabajar con dos decimales, la aproximación coincide con la solución.

t_k	Runge Kutta	Solución Exacta
0	25	25,00
0,2	21,7	21,70
0,4	19,49	19,49
0,6	18,01	18,01
0,8	17,02	17,02
1	16,35	16,35
1,2	15,91	15,91
1,4	15,61	15,61
1,6	15,41	15,41
1,8	15,27	15,27
2	15,18	15,18

El grafico muestra las estimaciones obtenidas por los tres métodos utilizando un h=0,2 y la solución exacta. En el gráfico no se visualiza la solución ya que esta coincide con la estimación obtenida con el método de Runge Kutta.