Método de Variación de Parámetros

Introducción al Cálculo Diferencial e Integral

UNCPBA

12-05-17

Sea la Ecuación Diferencial Ordinaria lineal de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Sea la Ecuación Diferencial Ordinaria de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

(Observar que se encuentra normalizada)

Supongamos que y_1, y_2 soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(Por ejemplo con coeficientes constantes, cuando la ecuación lo permita)

Para solucionar la ecuación inhomogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Proponemos como candidato

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Calculamos las derivadas

$$
\begin{aligned}
y_p &= u y_1 + v y_2 \\
y_p' &= u' y_1 + u y_1' + v' y_2 + v y_2'
\end{aligned}
$$

Calculamos las derivadas

$$
\begin{aligned}
y_p &= uy_1 + vy_2 \\
y_p' &= u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'
\end{aligned}
$$

Notar que antes de calcular la derivada segunda de y_p, podemos ver que vamos a tener derivadas segundas de u y v que van a ser muy difíciles de tratar.

Calculamos las derivadas

$$
\begin{aligned}
y_p &= uy_1 + vy_2 \\
y_p' &= u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'
\end{aligned}
$$

Notar que antes de calcular la derivada segunda de y_p, podemos ver que vamos a tener derivadas segundas de u y v que pueden ser muy difíciles de tratar.

$$\boxed{u'y_1 + v'y_2 = 0} \tag{1}$$

Quedando entonces

$$
\begin{aligned}
y_p &= uy_1 + vy_2 \\
y_p' &= uy_1' + vy_2' \\
y_p'' &= u'y_1' + uy_1'' + v'y_2 + vy_2''
\end{aligned}
$$

Insertando en la ecuación

$$u'y_1' + uy_1'' + v'y_2 + vy_2'' + P(x)\left[uy_1' + vy_2'\right] + \\ Q(x)\left[uy_1 + vy_2\right] = R(x)$$

Insertando en la ecuación

$$u'y_1' + uy_1'' + v'y_2 + vy_2'' + P(x)\left[uy_1' + vy_2'\right] + \\ Q(x)\left[uy_1 + vy_2\right] = R(x)$$

y reordenando un poco

$$\begin{aligned} u\left[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right] &+ v\left[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\right] \\ &+ u'y_1' + v'y_2 = R(x) \end{aligned}$$

Insertando en la ecuación

$$u'y_1' + uy_1'' + v'y_2 + vy_2'' + P(x)\left[uy_1' + vy_2'\right] + Q(x)\left[uy_1 + vy_2\right] = R(x)$$

y reordenando un poco

$$\begin{aligned} u\underbrace{\left[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right]}_{=0} &+ v\underbrace{\left[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\right]}_{=0} \\ &+ u'y_1' + v'y_2 = R(x) \end{aligned}$$

Pero como y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea obtenemos

$$\boxed{u'y_1' + v'y_2 = R(x)}$$

Ordenando lo que obtuvimos hasta ahora

$$
\begin{aligned}
u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\
u'y_1' + v'y_2 &= R(x)
\end{aligned}
$$

Ordenando lo que obtuvimos hasta ahora

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2 &= R(x) \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (¿cuáles?)

Escribiéndolo en forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \tag{2}$$

Escribiéndolo en forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Cuya solución (mediante el método del determinante, o Cramer) es

$$\begin{aligned} u' &= \frac{-y_2(x)g(x)}{W[y_1, y_2]} \\ y' &= \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1, y_2]} \end{aligned}$$

De manera que la solución es

$$
\begin{aligned}
u &= \int \frac{-y_2(x)g(x)}{W[y_1, y_2]}dx \\
y &= \int \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1, y_2]}dx
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Consideremos la ecuación

$$y'' - y = \frac{1}{cosh(x)}$$

con solución de la ecuación homogénea

$$\begin{aligned} y_1 &= e^t \\ y_2 &= e^{-t} \end{aligned}$$

Ejemplo

Calculamos el wronskiano

$$W[y_1, y_2] = -2$$

Con las funciones objetivo

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{-exp(-x)\frac{1}{cosh(x)}}{-2}dx \\ y &= \int \frac{exp(x)\frac{1}{cosh(x)}}{-2}dx \end{aligned}$$

Ejemplo

Obteniendo, finalmente

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\left[2x - ln(exp(2x) - 1)\right] \\ y(x) &= -\frac{1}{2} ln(exp(2x) - 1) \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{2}\left[2x - ln(exp(2x) - 1)\right] exp(x) - \frac{1}{2} ln(exp(2x) - 1) exp(-x) \tag{3}$$

Generalizacion

Haciendo un planteo similar para ecuaciones lineales de orden n podemos encontrar una solución particular del problema

$$\sum a_i y^{(i)} = g(x) \tag{4}$$

con $a_n = 1$

Generalizacion

Haciendo suposiciones similares al caso bi-dimensional se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \dots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Generalizacion

Utilizando nuevamente el método de Cramer podemos determinar

$$u_i = \int \frac{W[y_1, y_2, ..., g(x), ..., y_n]}{W[y_1, y_2, ..., y_n]} dx$$

donde

$$W[y_1, y_2, ..., \underbrace{g(x)}_{i}, ..., y_n] = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & 0 & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n & y_2^n & \dots & \underbrace{g}_{\text{i-ésima columna}} & \dots & y_n^n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

La ecuación es

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - 2\frac{1}{x^2}y' + 2\frac{1}{x^3}y = 2x$$

con solución de la ecuación homogénea

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x \\ y_2(x) &= x^2 \\ y_3(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calculamos los wronskianos

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, y_3] &= 6x \\ W[g(x), y_2, y_3] &= -6x \\ W[y_1, g(x), y3] &= 4 \\ W[y_1, y_2, g(x)] &= 2x^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Las funciones objetivo son

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \int \frac{-6x}{6x}dx = -x \\
u_2(x) &= \int \frac{4}{6x}dx = \frac{2}{3}x \\
u_3(x) &= \int \frac{2x^3}{6x}dx = \frac{1}{9}x^3
\end{aligned}
$$

y ahora puede calcularse la solución particular.