Métodos para hallar la segunda solución de una ecuación diferencial de orden 2

1. Reducción de orden

Sea la ecuación diferencial homogénea:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

e $y_1(x)$ la solución conocida de la ecuación. Luego $cy_1(x)$, donde c es una constante, es también solución pero estas soluciones son linealmente dependientes.

Propongamos una segunda solución de la forma:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

donde $v(x)$ no es constante. Luego $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones linealmente independientes.

Sea $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ solución de (ecuación 1), luego:

$$y_2'(x) = v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + +v(x)y_1''(x)$$

Luego si $y_2(x)$ es solución de (ecuación 1):

$$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) = 0$$

Sustituyendo

$$[v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x)] + P(x)[v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x)] + Q(x)v(x)y_1(x) = 0$$

$$v''(x)y_1(x) + v'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1) + v(x)((y_1''(x) + P(x)y_1'(x)) + Q(x)y_1(x)) = 0$$

$$v''(x)y_1(x) = -v'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1)$$

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -\frac{(2y_1'(x)+P(x)y_1)}{y_1(x)}$$

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - P(x)$$

$$lnv'(x) = -2lny_1 - \int[P(x)dx]$$

$$v'(x) = y_1^{-2}(x)e^{-\int[P(x)dx]}$$

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^{-2}(x)}e^{-\int[P(x)dx]}$$

Luego:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^{-2}(x)}e^{-\int[P(x)dx]}$$

1.1. Ejemplo

Dada $y_1(x) = x$ solución de la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' - y = 0$. Encontrar otra solución linealmente independiente. La ecuación normalizada es:

$$y'' + x^{-1}y' - x^{-2}y = 0$$

Si $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, en este caso tenemos que $y_2(x) = xv(x)$, luego:

$$y_2'(x) = v(x) + xv'(x)$$

$$y_2''(x) = 2v'(x) + xv''(x)$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$(2v'(x) + xv''(x)) + x^{-1}v(x) + v'(x) - x^{-1}v(x) = 0$$

$$xv''(x) + 3v'(x) = 0$$

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -\frac{3}{x}$$

$$lnv'(x) = -3lnx$$

$$v(x) = \int \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}$$

Luego:

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = -\frac{1}{2x^2}x = -\frac{1}{2x}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea dada es:

$$y_H(x) = c_1x + c_2\frac{1}{x}$$

2. Método de Abel

Teorema 1. *Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones de la ecuación diferencial (ecuación 1). Entonces $W[y_1(x), y_2(x)] \equiv 0$ o $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$*

Demostración. Dado que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones de (ecuación 1)tenemos que:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

Luego si multiplicamos a la primera por $y_2(x)$ y a la segunda por $y_1(x)$ y las restamos tenemos:

$$\underbrace{(y_2y_1'' - y_1y_2'')}_{-\frac{dW}{dx}} + P(x)\underbrace{(y_2y_1' - y_1y_2')}_{-W[y_1,y_2]} + Q(x)\underbrace{(y_2y_1 - y_2y_1)}_{0} = 0$$

Esto es:

$$-\frac{dW}{dx} - W = 0$$

$$-\frac{1}{W}\frac{dW}{dx} = 0$$

Luego:

$$W[y_1, y_2] = ce^{-\int P(x)dx}$$

Por lo tanto, $W[y_1, y_2] \neq 0$ siempre que $c \neq 0$ y si $c = 0$ se tendrá que $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$ □

Corolario 1. *$y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones linealmente dependientes si y sólo si $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$*

Demostración. Dos funciones son linealmente dependientes si una es múltiplo de la otra, $y_1(x) = k\,y_2(x)$. Luego:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W[y_1(x), ky_1(x)] = ky_1y_1' - ky_1y_1' = 0$$

Si $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$ entonces:

$$y_1y_2' - y_2y_1' = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2}}_{(\frac{y_2}{y_1})'} = 0$$

Luego, $\frac{y_2}{y_1} = c$ lo que implica que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente dependientes. □

2.1. Ejemplo

Dada $y_1(x) = e^x$ solución de la ecuación diferencial $y'' - y' = 0$. Encontrar otra solución linealmente independiente.

Sabemos que $W[y_1, y_2] = e^{-\int P(x)dx}$ y en este caso $P(x) = 1$ luego:

$$W[y_1, y_2] = ce^{-\int dx} = e^x$$

Por otro lado, tenemos que $y_1 = e^x$, luego

$$W[y_1, y_2] = e^xy_2' - e^xy_2$$

Igualando:

$$e^x = e^xy_2' - e^xy_2$$

$$1 = y_2' - y_2$$

Esta es una ecuación de primer orden lineal, cuyo factor integrante es:$u(x) = e^{\int -1dx} = e^x$.

$$(e^{-x}y_2)' = -e^{-x}$$

$$e^{-x}y_2 = -e^{-x} + c \quad c$$

$$y_2 = -1 + ce^x$$

Por la tanto al ecuación general de la ecuación es:

$$y_H(x) = c_1e^x - c_2$$